



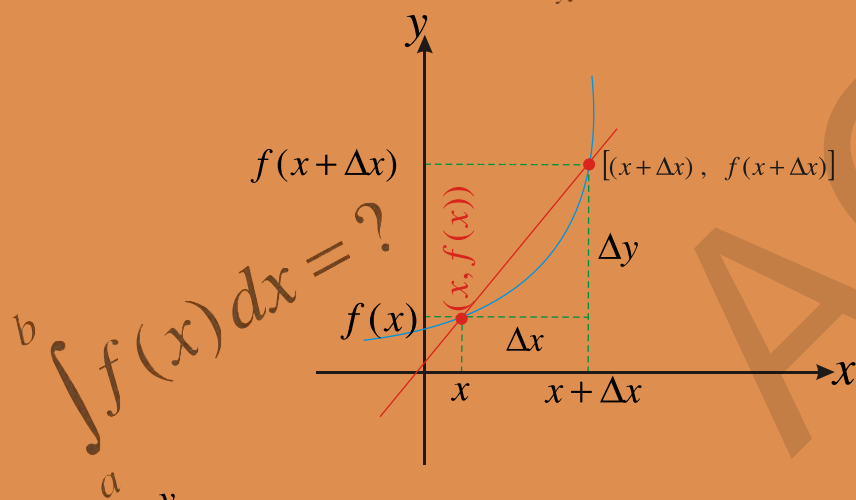
وزارت معارف

معینیت انکشاف نصاب تعلیمی و تربیة معلم
ریاست عمومی انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

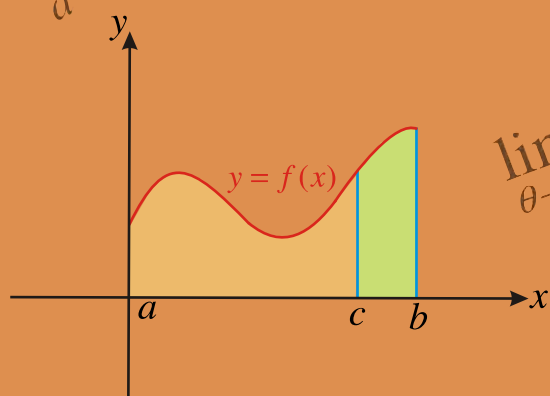
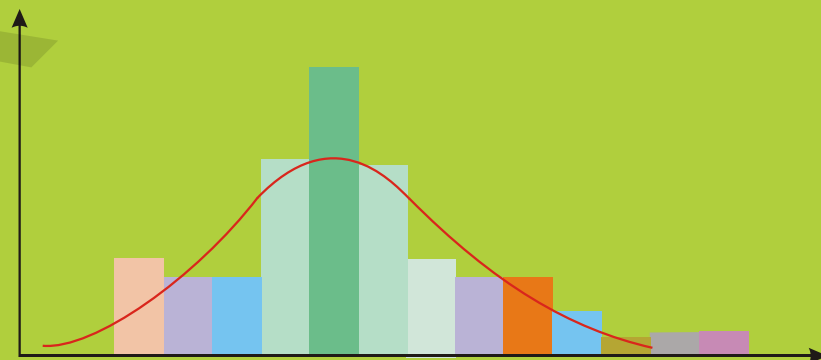
ریاضی

صنف ۱۲

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = ?$$



ریاضی صنف ۱۲



$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = ?$$

سال چاپ : ۱۳۹۶

کتاب های درسی متعلق به وزارت معارف بوده
خرید و فروش آن جداً ممنوع است. با متخلفین برخورد
قانونی صورت می گیرد.



سرود ملی

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه بان
لکه لمر پر شنه آسمان
لکه زړه وي جاویدان
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هیواد به تل ځلېږي
په سینه کې د آسیا به
نوم د حق مودی رهبر

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



وزارت معارف

معینیت انکشاف نصاب تعلیمی و تربیة معلم

ریاست عمومی انکشاف نصاب تعلیمی

و تألیف کتب درسی

ریاضی

صنف ۱۲

سال چاپ: ۱۳۹۶ هـ. ش.



مؤلفان

پوهیالی حمدالله شیرزی وردگ، عضو تیم پروژه تألیف کتب درسی وزارت معارف
مؤلف مهناز توخی، عضو علمی و آمر دیپارتمنت ریاضی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی
سر مؤلف میرنقیب الله، عضو علمی دیپارتمنت ریاضی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی
پوهنمل طلاباز حبیب زی، عضو تیم پروژه تألیف کتب درسی وزارت معارف
پوهندوی خالقداد فیروز کوهی، عضو تیم پروژه تألیف کتب درسی وزارت معارف
معاون مؤلف محمد خالد ستوری خدران، عضو علمی دیپارتمنت ریاضی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی
معاون مؤلف رحیمه هدایت زی، عضو علمی دیپارتمنت ریاضی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

ترجمه

پوهیالی حمدالله شیرزی وردگ، عضو تیم پروژه تألیف کتب درسی وزارت معارف
سر مؤلف میرنقیب الله، عضو علمی دیپارتمنت ریاضی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

ایدیت علمی مسلکی

حبیب الله راحل، مشاور وزارت معارف در ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی
سر مؤلف حاجی نظام الدین، عضو علمی دیپارتمنت ریاضی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

ایدیت زبانی

سر مؤلف سید محمود پایمناری، عضو علمی دیپارتمنت ریاضی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

کمیته دینی، سیاسی و فرهنگی

سید فاضل شاه پاچا، عضو تیم پروژه تألیف کتب درسی وزارت معارف
حبیب الله راحل، مشاور وزارت معارف در ریاست انکشاف نصاب تعلیمی

کمیته نظارت

دکتور اسدالله محقق، معین انکشاف نصاب تعلیمی تربیه معلم و مرکز ساینس
دکتور شیر علی ظریفی، رئیس پروژه انکشاف نصاب تعلیمی
سر مؤلف عبدالظاهر گلستانی، رئیس عمومی انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

طرح و دیزاین: ولیدنوید نسیمی و احمد یما معصومی

تنظیم امور چاپ: محمد کبیر حقمل، رئیس نشرات و اطلاعات وزارت معارف

بسم الله الرحمن الرحيم

پیام وزیر معارف

سپاس بیکران آفریدگاری را که انسان را در احسن تقویم آفرید و او را قدرت بیان بخشید و به زیور علم و اندیشه آراست و درود بی پایان بر پیامبر مکرم اسلام حضرت محمد مصطفی - صلی الله علیه وسلم - که معلم بزرگ انسانیت است و پیام آور رحمت و هدایت و روشنایی.

تعلیم و تربیت نقطه آغاز هر تحول و سنگ بنای توسعه در هر جامعه است. هدف اصلی تعلیم و تربیت به فعلیت رساندن نیروهای بالقوه انسان و شگوفای ساختن استعدادهای درونی وی است.

کتاب درسی یکی از ارکان مهم در فرایند تعلیم و تربیت محسوب می شود که همگام با تحولات و پیشرفت های علمی نوین و مطابق با نیازمندی های جامعه تهیه و تألیف می گردد و باید دارای ظرفیت و ظرفیتی باشد که بتواند آموزه های دینی و اخلاقی را توأم با فرآورده های علوم جدید با میتودهای نوین به شاگردان منتقل کند.

کتابی که اکنون در اختیار شما قرار دارد، بر اساس همین ویژه گی ها تهیه و تألیف شده است. سعی وزارت معارف همواره براین بوده که نصاب تعلیمی و کتب درسی معارف کشور، متکی بر مبانی تعلیم و تربیت اسلامی و حفظ هویت ملی، مطابق با معیارهای علمی و روش های تربیتی نوین بوده، استعدادهای دانش آموزان را در همه زمینه های اخلاقی و علمی شگوفای گرداند و قدرت تفکر، ابتکار و حس جستجوگری را در آنها تقویت بخشد. ترویج فرهنگ گفتگو و رواداری، تقویت حس وطن دوستی، مهربانی، گذشت و همبستگی از خواست های دیگر وزارت معارف است که باید در کتب درسی متبلور باشد.

کتاب های درسی بدون داشتن معلم خوب و مسلکی نمی تواند اهداف مورد نظر را بر آورده سازد. معلم یکی از ارکان مهم تعلیم و تربیت و مجری برنامه های آموزشی و تربیتی است. از معلمان و آموزگاران خوب، متعهد و دلسوز کشورم که ستیزه با سیاهی و نادانی را پیشه خود ساخته اند، صمیمانه آرزومندم که با تطبیق دقیق و مخلصانه نصاب تعلیمی، کودکان و جوانان میهن را بسوی فتح قله های رفیع دانش، اخلاق و معنویت رهنمون گردند.

کامیابی نظام آموزشی کشور بدون همکاری جدی مردم غیر ممکن است. ازین رو از همه اقشار و افراد ملت شریف افغانستان، بخصوص از خانواده ها و اولیای محترم شاگردان خواهشمندم که از هیچگونه همکاری در جهت تحقق اهداف معارف دریغ نورزند. همچنان از همه نویسندگان، دانشمندان، متخصصان تعلیم و تربیت و اولیای محترم شاگردان تقاضا می شود که با ارائه نظریات و پیشنهادهای سالم و نقدهای سازنده خود وزارت معارف را در بهبود هر چه بیشتر کتاب های درسی همکاری نمایند.

لازم می دانم از تمام مؤلفان دانشمند و کارمندان اداری و فنی وزارت معارف که در تهیه، تألیف، طبع و توزیع این کتاب زحمت کشیده اند و از همه نهادهای ملی و بین المللی که در زمینه چاپ و توزیع کتب درسی همکاری نموده اند، قدردانی و تشکر نمایم.

در اخیر از خداوند منان استدعا دارم که به لطف بی پایان خود، ما را در تحقق آرمان های مقدس معارف یاری رساند. إنه سمیع قریب مجیب.

دکتور اسدالله حنیف بلخی

وزیر معارف



فهرست

صفحه

۱-۴۰

عنوان

فصل اول: لیمت

- مفهوم لیمت
- لیمت طرف راست و طرف چپ
- خواص لیمت
- لیمت توابع نسبتی
- شکل مبهم $\frac{\infty}{\infty}$
- اشکال مبهم $(\infty - \infty)$ و $(0, \infty)$
- اشکال مبهم $1^\infty, \infty^0, 0^0$
- لیمت توابع مثلثاتی
- متادیت توابع
- خواص توابع متادیت
- نکات مهم و تمرینات عمومی فصل اول

۴۱-۸۲

فصل دوم: مشتق

- مشتقات
- مشتق یک تابع
- مفهوم هندسی مشتق
- میل و معادله مماس
- قوانین مشتق
- مشتق تابع مرکب
- مشتق توابع مثلثاتی
- مشتقات ضمنی
- مشتقات مرتبه بلند
- نکات مهم و تمرینات عمومی فصل دوم

۸۳-۱۳۲

فصل سوم: موارد استعمال مشتق

- نقاط بحرانی یک تابع (اعظمی (Maximum) و اصغری (Minimum))
- نقاط انعطاف در گراف ها
- تحولات توابع درجه دوم
- مجانب های گراف توابع
- تحولات توابع هوموگرافیک
- گراف تابع یک مجهول درجه سوم
- قضیه Rolle
- قاعده هوبیتال
- تطبیق نقاط بحرانی
- نکات مهم و تمرینات عمومی فصل سوم



صفحه	عنوان
۱۳۳-۱۷۲	فصل چهارم: انتیگرال‌ها
	<ul style="list-style-type: none"> • مجموع ریمان • مفهوم انتیگرال • انتیگرال غیر معین • خواص انتیگرال غیر معین • انتیگرال معین • خواص انتیگرال معین • قضایای اساسی مشتق و انتیگرال • انتیگرال گیری توسط تعویض • انتیگرال گیری توسط طریقه قسمی • نکات مهم و تمرینات عمومی فصل چهارم
۱۷۳-۱۹۸	فصل پنجم: مشتق و انتیگرال توابع لوگاریتمی و اکسپوننشیل
	<ul style="list-style-type: none"> • مشتق توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی • مشتق توابع معکوس • مشتق توابع معکوس مثلثاتی • کسور قسمی • انتیگرال‌های توابع اکسپوننشیل • انتیگرال‌های توابع لوگاریتمی • محاسبه انتیگرال توسط کسور قسمی • نکات مهم و تمرینات عمومی فصل پنجم
۱۹۹-۲۲۲	فصل ششم: تطبیقات انتیگرال
	<ul style="list-style-type: none"> • محاسبه مساحت محصور شده توسط یک منحنی • محاسبه مساحت محصور شده توسط دو منحنی • محاسبه حجم اجسام دورانی • محاسبه طول قوس • نکات مهم و تمرینات عمومی فصل ششم
۲۲۳-۲۶۰	فصل هفتم: احصائیه
	<ul style="list-style-type: none"> • توزیع تابع احتمال • آزمایش برنولی و توزیع دو جمله‌ای • توزیع احتمال پواسن • توزیع نورمال • مساحت تحت منحنی توزیع نورمال و استاندارد کردن آن • نمونه گیری • توزیع اوسط نمونه • قضیه لیمت مرکزی • توزیع نمونه نسبت • نکات مهم و تمرینات عمومی فصل هفتم
۲۶۱-۲۸۱	فصل هشتم: احتمالات
	<ul style="list-style-type: none"> • فضای نمونه گسسته و پیوسته • حوادث هم چانس • احتمال فضاهای پیوسته • احتمال مشروط • اصل حاصل ضرب • استقلالیت حوادث اتفاقی • نکات مهم و تمرینات عمومی فصل هشتم



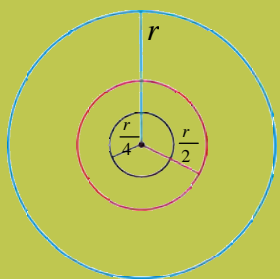
فصل اول

لیمت





مفهوم لیمت



از یک نقطهٔ مستقر (0) یک مستوی سه دایره

به ترتیب با شعاع r , $\frac{r}{2}$, $\frac{r}{4}$ رسم کنید. چند

مرتبه این عملیه را ادامه داده می‌توانید؟



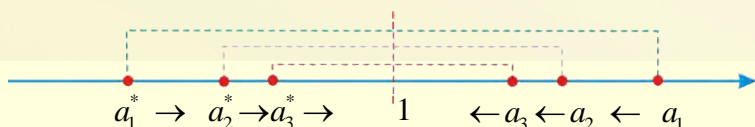
ترادف‌های $a_n = (1 + \frac{1}{n})$ و $a_n^* = (1 - \frac{1}{n})$ را برای $n \in \mathbb{N}$ در نظر بگیرید و فعالیت زیر را انجام دهید:

- موقعیت a_1 , a_1^* را روی محور اعداد نشان دهید.
- آیا a_2 و a_2^* داخل و یا خارج فاصله a_1 و a_1^* قرار دارد؟
- با توجه به مراحل فوق بگویید که موقعیت نقاط a_3 و a_3^* روی محور اعداد کجاست.
- با گرفتن یک قیمت بزرگ n , a_n و a_n^* به کدام قیمت نزدیک می‌شود.

از فعالیت فوق، نتیجهٔ زیر را نوشته کرده می‌توانیم:

در شکل زیر دیده می‌شود که با ازدیاد n از طرف راست ترادف a_n به قیمت 1 و همچنان از طرف چپ ترادف a_n^* نیز به قیمت 1 نزدیک می‌شود، یعنی:

ترادف a_n وقتی که $n \rightarrow \infty$ کند، به عدد یک از طرف راست نزدیک می‌شود و همچنان a_n^* وقتی که n به بی‌نهایت تقرب کند، به عدد یک از طرف چپ نزدیک می‌شود.



برای اینکه مفهوم لیمت را خوب توضیح داده باشیم، در مرحلهٔ اول با توجه به گراف چند ترادف را تحت مطالعه قرار می‌دهیم:

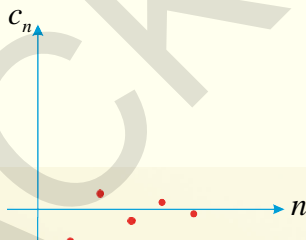
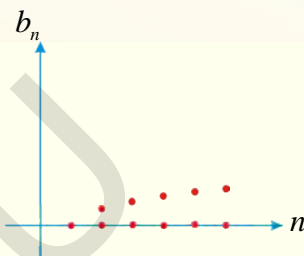
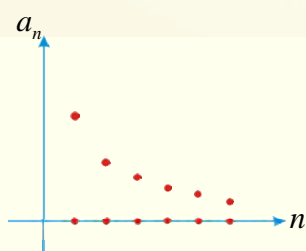
مثال: ترادف‌های داده شده زیر برای بزرگ‌ترین قیمت n ، به کدام عدد تقرب می‌نماید. موضوع را به شکل گرافیکی تشریح کنید در صورتی که:

$$a_n = \left(\frac{2n+3}{n}\right) \dots (i) \quad b_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) \dots (ii) \quad c_n = (-1)^n \frac{1}{n} \dots (iii)$$

حل: می‌دانیم که برای قیمت‌های مختلف n نمایش گرافیکی ترادف‌ها طور زیر می‌باشد:

n	1	2	3	4	5	6	7	$\rightarrow \infty$
a_n	5	$\frac{7}{2}$	3	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{15}{6}$	$\frac{17}{7}$	$\rightarrow 2$

n	1	2	3	4	5	$\rightarrow \infty$
b_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\rightarrow 1$

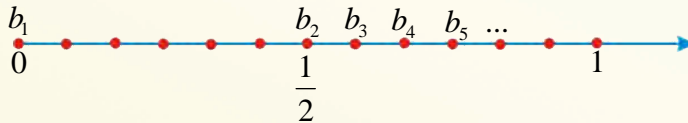


n	1	2	3	4	5	$\rightarrow \infty$
c_n	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	$\rightarrow 0$

در گراف‌های فوق دیده می‌شود که با ازدیاد قیمت‌های n ، قیمت ترادف‌ها به یک عدد معین نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود؛ مانند ترادف a_n که به عدد (2)، ترادف b_n به عدد (1) و ترادف c_n به صفر تقرب می‌کنند. طوری که با دادن قیمت‌های بسیار بزرگ به n موضوع به آسانی واضح می‌شود، از جدول قیمت‌های ترادف به ملاحظه می‌رسد که در موجودیت لیمت، ترادف به یک قیمت معین نزدیک می‌شود که لیمت (limit) نامیده می‌شود.

برای این کار ترادف $b_n = \frac{n-1}{n}$ را در نظر می‌گیریم بنابراین داریم که:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
b_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{11}$...



و یا اگر ترادف‌های اعداد $I \dots \dots \frac{1}{n}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots$ ، $II \dots \dots \frac{n+1}{n}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, \dots$ و $(III) \dots \dots 2n, \dots, 6, 4, 2$ را در نظر بگیریم، به مشاهده می‌رسد که اگر n به طرف بی‌نهایت نزدیک شود؛ ترادف I به طرف صفر، ترادف II به طرف یک و ترادف III به طرف (∞) نزدیک می‌گردد.

تقرب متحول: گفته می‌شود که متحول x به عدد معین a تقرب می‌کند، در صورتی که x حسب دلخواه به a نزدیک شده بتواند؛ یعنی تفاوت بین x و a از هر عدد کوچک ($\delta > 0$) کوچکتر گردد، مفهوم فوق طور سمبولیک به عبارات معادل ذیل افاده می‌گردد.

$$\forall \delta > 0: |x - a| < \delta \quad \text{یا} \quad x \rightarrow a \quad \text{یا} \quad |x - a| \rightarrow 0$$

تقرب متحول از راست ($x \rightarrow a^+$): اگر یک ترادف متناقص قیمت‌های x وجود داشته باشد طوری که تدریجاً حسب دلخواه به a نزدیک شوند، چنانچه:

$$x: a + 0.1, a + 0.01, a + 0.001, a + 0.0001, \dots \rightarrow a^+$$

تقرب متحول از چپ ($x \rightarrow a^-$): در صورتی که ترادف متزاید قیمت‌های x تعیین شده بتواند طوری که تدریجاً حسب دلخواه به a نزدیک شوند، چنانچه:

$$x: a - 0.1, a - 0.01, a - 0.001, a - 0.0001, \dots \rightarrow a^-$$

بنابراین، تقرب متحول x به عدد a معادل است با تقرب از دو سمت (راست و چپ) یعنی:

$$x \rightarrow a \Leftrightarrow (x \rightarrow a^+, x \rightarrow a^-)$$



مثال: متحول x را به عدد 9 تقرب دهید، به عبارت دیگر مفهوم $x \rightarrow 9$ را توضیح دهید.

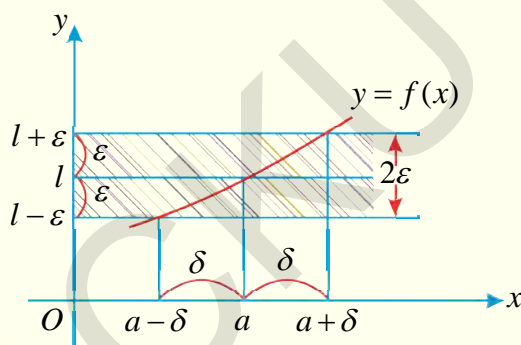
حل:

$$x: 9.1, 9.01, 9.001, 9.0001, \dots \rightarrow 9^+$$

$$x: 8.9, 8.99, 8.999, 8.9999, \dots \rightarrow 9^-$$

تعریف: هرگاه تابع $f(x)$ در یک انتروال باز که عدد a شامل آن است، تعریف شده باشد (ولو که در a غیر قابل تعریف باشد) و با تقرب متحول x به a ، $f(x)$ حسب دلخواه به عدد l نزدیک شود گفته می شود که لیمت تابع $f(x)$ عبارت از l است زمانی که x به a تقرب کند

و می نویسند که: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ یا $x \rightarrow a$ یا $f(x) \rightarrow l$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow (|x - a| \rightarrow 0 \Rightarrow |f(x) - l| \rightarrow 0)$$

تمرین



در تابع $f(x) = 2x$ به صورت گرافیکی نشان دهید که اگر x به طرف عدد 3 تقرب کند، $f(x)$ به عدد 6 تقرب می کند.

لیمت طرف راست و طرف چپ

به شکل مقابل توجه نموده و بگویید که از کدام دو طرف به درخت نزدیک می شوند؟



- در جدول زیر برای تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $x \neq 0$ بعضی از قیمت ها درج گردیده است:

x	0.98	0.99	0.999	?	1.001	1.01	1.02
$f(x)$	1.98	1.99	1.999	?	2.001	2.01	2.02



- گراف تابع را رسم نمایید.
- هرگاه x به عدد (1) تقرب کند، $f(x)$ به کدام عدد تقرب می کند؟
- از فعالیت فوق نتیجه زیر به دست می آید:

لیمت طرف راست: تابع $f(x)$ در عدد a دارای لیمت راست l_1 است؛ اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد کوچک $\delta > 0$ وجود داشته باشد طوری که $x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon)$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l_1 \text{ یا}$$

لیمت طرف چپ: تابع $f(x)$ در a دارای لیمت چپ l_2 است؛ اگر برای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد $\delta > 0$ وجود داشته باشد طوری که $x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) \in (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l_2$$

تابع $f(x)$ وقتی که $x \rightarrow a$ دارای لیمت l می باشد، یعنی $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ به شرطی که:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

مثال: نشان دهید که $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$ است.

حل: لیتم‌های دست راست و دست چپ را مطالعه می‌کنیم.

x	3.5	3.1	3.01	3.001	3^+
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	6

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	3^-
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	6

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

در بالا دیده می‌شود که لیتم‌های دست راست و دست چپ باهم مساوی اند،

بنابراین $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$ است.

طریقه دوم: فرض می‌کنیم برای عدد کوچک اختیاری $\varepsilon > 0$ یک عدد $\delta > 0$ وجود داشته باشد، طوری که:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$|x - 3| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| = \left| \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} - 6 \right| = |x + 3 - 6| = |x - 3| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \delta$$

در رابطه فوق دیده می‌شود که ε با δ رابطه دارد، یعنی اگر به ε قیمت دهیم، δ قیمت می‌گیرد و اگر به δ قیمت دهیم، ε قیمت می‌گیرد؛ بنابراین تعریفی که برای لیتم موجود است صحت دارد، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6 \text{ است.}$$



نشان دهید که تابع $f(x) = \frac{|x - 2|}{x - 2}$ وقتی که $x \rightarrow 2$ تقرب نماید، لیتم ندارد؟

خواص لیمت (Properties of limit)

آیا هر دو طرف لیمت‌های مساوات مقابل

در نقطه $x \rightarrow -1$ با هم مساوی اند یا

خیر؟

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 \pm x) = \lim_{x \rightarrow -1} x^2 \pm \lim_{x \rightarrow -1} x$$



برای اجرای این فعالیت، پاسخ سوال‌های زیر را رایه کنید:

- اگر x به عدد (2) نزدیک شود، لیمت تابع $f(x) = x + 2$ چند خواهد بود؟
- اگر x به 3 تقرب کند ($x \rightarrow 3$)، لیمت تابع $g(x) = 2x$ را دریافت کنید.
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ را دریافت کنید.
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ را دریافت کنید.
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \div \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ را دریافت کنید.

از فعالیت فوق، نتیجه زیر را می‌توانیم به دست آوریم:

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ باشد:

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} Kf(x) = K \lim_{x \rightarrow a} f(x) = KA$
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B$
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B$
- 4) $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \neq 0$
- 5) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{A}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \geq 0$

از جمله خواص فوق تنها سه خاصیت را ثبوت می‌نماییم و خواص متباقی را به شکل کارخانه‌گی به شاگردان می‌گذاریم.

توابع بی‌نهایت کوچک: تابع $\varepsilon(x)$ در $x \rightarrow a$ بی‌نهایت کوچک نامی ده می‌شود، هرگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

1- برای اینکه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ باشد، لازم و کافیت که $f(x)$ به شکل مجموع عدد ثابت b و تابع بی‌نهایت کوچک $\varepsilon(x)$ در $x \rightarrow a$ ارائه شده بتواند، یعنی:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = b + \varepsilon(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

2- اگر $\varepsilon(x)$ در $x \rightarrow a$ بی‌نهایت کوچک باشد که صفر نگردد، پس $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\varepsilon(x)} = \infty$ مجموع توابع بی‌نهایت کوچک، باز هم یک تابع بی‌نهایت کوچک است.

3- حاصل ضرب توابع بی‌نهایت کوچک، یک تابع بی‌نهایت کوچک می‌باشد.

4- هرگاه $\varepsilon(x)$ بی‌نهایت کوچک و $u(x)$ تابعی باشد که لیمت آن صفر شده نتواند، پس تابع $v(x) = \frac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ یک تابع بی‌نهایت کوچک است.

مثال:

$$\text{I} \quad \text{تابع } \varepsilon(x) = x^2 - 9 \text{ در } x \rightarrow 3 \text{ بی‌نهایت کوچک است، زیرا: } \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) = 0$$

$$\text{II} \quad \text{تابع } \varepsilon(x) = \frac{1}{2x} \text{ در } x \rightarrow \infty \text{ بی‌نهایت کوچک می‌باشد.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = 0$$

مثال‌ها: با استفاده از خواص قبلی حل کنید.

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 1 = 2 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 1 = 2 \cdot 2^2 - 1 = 7$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -3} (x-1)^2 = \lim_{x \rightarrow -3} (x-1) \cdot \lim_{x \rightarrow -3} (x-1) = (-4)(-4) = 16$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x-3}{x+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 4x - \lim_{x \rightarrow 0} 3}{\lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} 1} = \frac{0-3}{0+1} = -3$$

از حل مثال‌های فوق سه خاصیت لیمیت را به طور زیر بیان و ثبوت می‌نماییم:

1- لیمیت حاصل جمع چند تابع مساوی است با مجموع لیمیت‌های توابع مذکور؛ یعنی اگر $f(x_2)$ و $f(x_1)$ توابع باشند، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x_1) + f(x_2)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x_1) + \lim_{x \rightarrow a} f(x_2)$$

ثبوت: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x_1) = b_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x_2) = b_2$ باشد؛ پس داریم که:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x_1) \pm f(x_2)] = b_1 \pm b_2$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x_1) = b_1 + \varepsilon_1 \quad \dots \dots I \\ f(x_2) = b_2 + \varepsilon_2 \quad \dots \dots II \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1) \pm f(x_2) = (b_1 + \varepsilon_1) \pm (b_2 + \varepsilon_2) = b_1 \pm b_2 + (\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2)$$

چون $(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2)$ مجموعه و تفاضل دو تابع بی نهایت کوچک است و می دانیم که مجموع و تفاضل دو تابع بی نهایت کوچک باز هم یک تابع بی نهایت کوچک است؛ پس لیمت آن صفر می باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x_1) \pm f(x_2)] = b_1 \pm b_2 = \lim_{x \rightarrow a} f(x_1) \pm \lim_{x \rightarrow a} f(x_2)$$

2- لیمت حاصل ضرب دو یا چند تابع مساویست با حاصل ضرب لیمت های هر یک آنها:

ثبوت:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x_1) \cdot f(x_2)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x_1) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x_2) = b_1 \cdot b_2$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x_1) = b_1 + \varepsilon_1 \\ f(x_2) = b_2 + \varepsilon_2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1) \cdot f(x_2) = (b_1 + \varepsilon_1)(b_2 + \varepsilon_2)$$

$$f(x_1) \cdot f(x_2) = b_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot \varepsilon_2 + b_2 \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$$

چون ε_1 و ε_2 اعداد بی نهایت کوچک ولی مثبت اند، حاصل ضرب آنها نیز یک تابع بی نهایت کوچک است و لیمت آن صفر می باشد؛ یعنی: مجموعه $b_1 \cdot \varepsilon_2 + b_2 \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$ به طرف صفر تقرب می کند.

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x_1) \cdot f(x_2)] = b_1 \cdot b_2$$

3- لیمت حاصل تقسیم دو تابع عبارت است از نسبت لیمت های هر یک از توابع:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b_1}{b_2}, \quad g(x) = b_2 \neq 0$$

ثبوت:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = b_1 + \varepsilon_1 \\ g(x) = b_2 + \varepsilon_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2}$$

از هر دو طرف مساوات بالا $\frac{b_1}{b_2}$ را تفریق می کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b_1}{b_2} &= \frac{b_1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2} - \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_2(b_1 + \varepsilon_1) - b_1(b_2 + \varepsilon_2)}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} \\ &= \frac{b_2 b_1 + b_2 \varepsilon_1 - b_1 b_2 - b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} = \frac{b_2 \varepsilon_1 - b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} \\ &\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_2 \varepsilon_1 - b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} + \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_2 \varepsilon_1 - b_1 \varepsilon_2 + b_1 b_2 + b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} \\ &= \frac{b_2(b_1 + \varepsilon_1)}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} = \frac{b_1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2} \end{aligned}$$

چون ε_1 و ε_2 اعداد بی نهایت کوچک ولی مثبت اند و اگر $x \rightarrow a$ تقرب کند، حاصل تقسیم آنها باز هم کوچک می گردد بنابراین لیمت آن صفر می گردد:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b_1}{b_2}$$

قضیه ساندویچ: هرگاه توابع $f(x)$, $g(x)$ و $h(x)$ برای هر x از یک انتروال باز که عدد a را در بر دارد (ولو برای $x \neq a$)، شرط $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ را صدق کند، در صورتی که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$ باشد؛ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ است.

مثال: اگر $u(x)$ تابع دارای خاصیت $(1 - \frac{x^2}{4} \leq u(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2})$ باشد $\lim_{x \rightarrow a} u(x)$ را مشخص کنید؟

حل: واضح دیده می شود که $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \frac{x^2}{4}) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{x^2}{2})$ بنا بر قضیه ساندویچ $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 1$ است.

قضیه: اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابع و همچنان $f(x) < g(x)$ باشد پس در صورت بودن لیمت، لیمت آن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ است.

مثال: توابع $f(x) = \frac{15x-4}{5x+6}$ و $g(x) = \frac{15x+4}{5x-6}$ را در نظر می گیریم؛ واضح است که برای $x > 1$ $f(x) < g(x)$ است.

حل:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x-4}{5x+6} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x+4}{5x-6} = \frac{15}{5} = 3$$



تمرین

لیمیت توابع زیر را در صورت موجودیت در نقاط داده شده دریافت کنید؟

1) $\lim_{x \rightarrow 0} 6x^3 - 2x^2 + 5x + 3$

2) $\lim_{x \rightarrow -1} x^7 - 2x - 5$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(9x+2)^2 - 4}{x}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 7x}{(2x-5)^2 - 9}$

5) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-2}$

6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x^2 - 4x + 1}$

لیمت توابع نسبتی

آیا می‌دانید رابطه‌های مقابل به چه نامی یاد می‌گردند؟

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$



فعالیت

- لیمیت تابع $y = x^2 - 1$ را دریافت کنید زمانی که $x \rightarrow -2$ تقرب کند.
 - لیمیت تابع $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ را دریافت کنید زمانی که $x \rightarrow +1$ تقرب کند.
 - لیمیت تابع $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ را دریافت کنید زمانی که $x \rightarrow \infty$ تقرب کند.
- از فعالیت فوق نتیجه زیر را می‌توان نوشت:

- لیمیت بعضی توابع مستقیماً از وضع نمودن قیمت به دست می‌آید.

- توابعی که اشکال مبهم مانند $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, \dots$ را به خود بگیرد بعد از رفع شکل ابهام، لیمیت آن به دست می‌آید که به طور زیر آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم:

I- شکل مبهم $\frac{0}{0}$:

فعالیت

- لیمیت تابع $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ را در نقطه $x = -1$ به دست بیاورید.
- لیمیت تابع $f(x)$ وقتی که $x \rightarrow 1$ کند، چه نوع شکل از ابهام را دارد؟
- اگر $x = 1$ باشد آیا تابع $f(x)$ را طوری ساده ساخته می‌توانیم که تابع یک قیمت معین را به خود اختیار کند.

نتیجه فعالیت بالا را این طور بیان می‌کنیم:

اگر یک تابع شکل مبهم $\frac{0}{0}$ را داشته باشد، برای دریافت لیمیت آن به طور زیر عمل می‌نماییم:

ابتدا تابع را تجزیه می‌کنیم، بعداً آن را ساده می‌سازیم عامل ابهام (فکتور خبیثه) آن را از بین می‌بریم و سپس قیمتی را که متحول به آن تقرب می‌نماید وضع می‌نماییم قیمت تابع بدست می‌آید.

مثال ها: لیمت‌های زیر را بدست آرید:

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}, \quad 3) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16}$$

حل: ابتدا شکل لیمت را تعیین می‌نماییم:

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(-2)^2 - 4}{-2 + 2} = \frac{0}{0}$$

چون لیمت فوق شکل مبهم $\frac{0}{0}$ را دارا است، پس به کمک تجزیه قیمت لیمت را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} (x-2) = -2 - 2 = -4$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} = \frac{2^2 - 12 + 8}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

حل: مثال دوم هم شکل $\frac{0}{0}$ را دارد؛ پس: $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-4) = 2 - 4 = -2$

$$3) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} = \frac{0}{0}$$

حل: در مثال دیده می‌شود که لیمت شکل مبهم $\frac{0}{0}$ را دارا است؛ پس برای ساده کردن آن صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب می‌نماییم.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} \cdot \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 4} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt{x}+4} = \frac{1}{8}$$



$$\begin{array}{lll} 1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x}+1-2} = ? & 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{5}{2x-3} + 5}{x^2-1} = ? & 3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = ? \\ 4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{5}}{x-2} = ? & 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+3} - \frac{1}{3}}{x} = ? & \end{array}$$

II- شکل مبهم $\frac{\infty}{\infty}$

آیا لیمت تابع مقابل را می‌توانید تعیین

کنید؟

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x + 8}{2x^2 - 2}$$



- لیمت تابع $f(x) = 2x^4 + x^3 - 4x - 1$ را در صورتی دریافت نمایید که $x \rightarrow \infty$ تقرب کند.
- لیمت تابع $g(x) = x^3 - 2x - 4$ را در صورتی دریافت نمایید که $x \rightarrow \infty$ تقرب کند.
- لیمت تابع $y = \frac{5}{x-2}$ را در صورتی دریافت نمایید که $x \rightarrow \infty$ تقرب کند.
- لیمت تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ را در صورتی دریافت نمایید که $x \rightarrow 0$ تقرب کند.
- لیمت تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ را در صورتی دریافت نمایید که $x \rightarrow \infty$ تقرب کند.

نتیجه فعالیت فوق را به طور زیر مورد مطالعه قرار می‌دهیم:

نتیجه: برای دریافت لیمت توابعی که شکل مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ را داشته باشند، این طور عمل می‌کنیم:

صورت و مخرج تابع را تقسیم بر متحولی می‌نماییم که نسبت به همه بزرگ‌ترین توان را داشته باشد، بعد از ساده ساختن لیمت آن به دست می‌آید.

مثال 1: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 2}$ را دریافت کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 2} = \frac{\infty - 1}{\infty - 2} = \frac{\infty}{\infty}$$

حل: ابتدا شکل مبهم لیمت را تعیین می‌کنیم:

چون لیمیت شکل $\frac{\infty}{\infty}$ را دارد؛ صورت و مخرج را به بزرگ‌ترین توان x تقسیم می‌نماییم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2}}{3 - \frac{2}{x^2}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{3 - \frac{2}{\infty}} = \frac{1 - 0}{3 - 0} = \frac{1}{3}$$

مثال 2: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{x - 2}$ را دریافت کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{x + 2} = \frac{\infty - 2}{\infty + 2} = \frac{\infty}{\infty}$$

حل: چون لیمیت فوق شکل $\frac{\infty}{\infty}$ را دارد؛ صورت و مخرج کسر را به بلندترین توان x تقسیم می‌نماییم.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{2}{x^2})}{x^2(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{1 - \frac{2}{\infty^2}}{\frac{1}{\infty} + \frac{2}{\infty}} = \frac{1 - 0}{0} = \frac{1}{0} = \infty$$

مثال 3: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{x^2 - 2}$ را دریافت نمایید.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{x^2 - 2} = \frac{\infty - 1}{\infty^2 - 2} = \frac{\infty}{\infty}$$

حل: چون لیمیت فوق شکل $\frac{\infty}{\infty}$ را دارد؛ صورت و مخرج کسر را به بلندترین توان x تقسیم می‌نماییم.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{1 - \frac{2}{\infty}} = \frac{0}{1 - 0} = \frac{0}{1} = 0$$

یادداشت: توابعی که شکل مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ را دارند بدون اجرای عملیه می‌توانیم لیمیت آنها را به‌دست آوریم:

تابع $f(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n}$ را در نظر بگیرید؛ اگر x به بی‌نهایت تقرب کند $(x \rightarrow \infty)$:

1- اگر $m = n$ باشد لیمت تابع مذکور عبارت است از $\frac{a_0}{b_0}$.

2- اگر $m < n$ باشد لیمت تابع مذکور عبارت از صفر است.

3- اگر $m > n$ باشد لیمت تابع مذکور عبارت از ∞ است.

مثال 4: لیمت‌های زیر را بدون اجرای عملیه به دست آرید.

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 6x^4 - x^3 + x - 1}{-x^4 + 2x^2 - 3}$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-8 + 6x^3 - x^2 + x}{5x^3 - x^4 + 6x - 1}$

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1}$

حل:

1- در این مثال $m = n$ است؛ پس: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 6x^4 - x^3 + x - 1}{-x^4 + 2x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4}{-x^4} = -6$

2- در این مثال $m < n$ است؛ پس: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-8 + 6x^3 - x^2 + x}{5x^3 - x^4 + 6x - 1} = 0$

3- در این مثال $m > n$ است؛ پس: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1} = \infty$

شاگردان جواب سؤال‌های داده شده را در خانه بعد از اجرای عملیه به دست آورند.

قیمت لیمت‌های زیر را دریافت کنید:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x^2 - x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^2 - x + 9}{x^4 + x^2 - x - 5}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2}{x + 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^2 + x + 6}{x^3 - 3x + 4}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - x + 7}{x^3 - x + 5}$$

اشکال مبهم $(\infty - \infty)$ و $(0 \cdot \infty)$

لیمت‌های مقابل را دریابید؟

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4} - \frac{x - 1}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) \cdot \frac{2x^3 - 4}{x - 3}$$



• مزدوج $a+1$ را بنویسید.

• مزدوج $\sqrt{x}-1$ را بنویسید.

• قیمت لیمت تابع $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x+1}$ را دریافت کنید. در صورتی که $x \rightarrow \infty$ تقرب کند.

• قیمت لیمت تابع $f(x) = (2x-1)(x+1)$ را دریافت کنید در حالی که $x \rightarrow \infty$ تقرب کند.

نتیجه فعالیت فوق را به طور زیر بیان می‌کنیم:

برای دریافت لیمت توابعی که اشکال مبهم $(\infty - \infty)$ و $(0 \cdot \infty)$ را داشته باشند از مزدوج استفاده

نموده و آنها را طوری ساده می‌نماییم که اشکال $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ را اختیار نمایند، بعداً لیمت آنها را به

دست می‌آوریم:

مثال: قیمت لیمت‌های زیر را دریافت کنید:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{9}{x-1} - \frac{8x+10}{x^2-1} \right) = ?$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \left(\frac{1}{x^2+2x-3} \right) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{9}{x-1} - \frac{8x+10}{x^2-1} \right) = \frac{9}{1-1} - \frac{8 \cdot 1 + 10}{1^2 - 1} = \frac{9}{0} - \frac{18}{0} = \infty - \infty$$

حل 1:

چون لیمت فوق شکل $(\infty - \infty)$ را دارد؛ می‌توانیم بنویسیم:

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x + 9 - 8x - 10}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \left(\frac{1}{x^2 + 2x - 3} \right) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \left(\frac{1}{x^2 + 2x - 3} \right) = (1-1) \left(\frac{1}{1^2 + 2 - 3} \right) = 0 \cdot \frac{1}{3-3} = 0 \cdot \frac{1}{0} = 0 \cdot \infty$$

حل 2:

به مشاهده می‌رسد که لیمت فوق شکل مبهم $(0 \cdot \infty)$ را دارد؛ پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{4}$$



تمرین

لیمت‌های زیر را دریافت کنید.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} \right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^5 - 8x^3)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 5} \left[(x^2 - 25) \frac{1}{x-5} \right]$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$$

$1^\infty, \infty^0, 0^0$ اشکال مبهم

شکل مبهم لیمت مقابل را تعیین نمایید؟

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = ?$$



فعالیت

- لیمت تابع $y = x^x$ را در صورتی دریابید که $x \rightarrow 0$ کند.
 - لیمت تابع $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ را در صورتی دریابید که $x \rightarrow \infty$ کند.
 - به کمک کدام عملیه می‌توانیم اشکال 0^0 , 1^∞ و ∞^0 را به ضرب تبدیل نماییم.
- نتیجه فعالیت فوق را به طور ذیل بیان می‌نماییم:
- هرگاه یک تابع کنیم اشکال مبهم فوق را اختیار نماید می‌توانیم آنرا با استفاده از لوگاریتم طبیعی به شکل $0 \cdot \infty$ تبدیل کنیم؛ یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} \Rightarrow \ln(\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}) = \lim_{x \rightarrow a} (\ln f(x)^{g(x)}) = \lim_{x \rightarrow a} [g(x) \ln f(x)]$$

یادداشت:

I- هرگاه $n \rightarrow \infty$ تقرب نماید ترادف $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ به $e = 2.71828182$ تقرب میکند.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

به جدول زیر نگاه کنید:

n	$\frac{1}{n}$	$1 + \frac{1}{n}$	$(1 + \frac{1}{n})^n$
1	1	2	2
2	0.5	1.5	2.25
5	0.2	1.2	2.48832
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0.01	1.01	2.704813829
1000	0.001	1.001	2.716923932
10000	0.0001	1.0001	2.718145926
100000	0.00001	1.00001	2.718268237
1000000	0.000001	1.000001	2.718280469
1000000000	10^{-9}	$1 + 10^{-9}$	2.718281828



پس $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e = 2.718281828$ است که عدد $e = 2.71 \dots$ به نام عدد Euler یاد

می‌شود.

-II

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha \beta}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

ثبوت: می‌دانیم که هر 4 سؤال فوق شکل مبهم 1^∞ را دارد:

$$1) x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x}, \alpha \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha \beta}$$

$$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow x = \frac{\alpha}{u}, x \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow 0$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\beta \frac{\alpha}{u}} = \lim_{u \rightarrow 0} \left[(1 + u)^{\frac{1}{u}} \right]^{\alpha \beta}$$

$$x = \frac{1}{u} \rightarrow u = \frac{1}{x}, u \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left[(1 + u)^{\frac{1}{u}} \right]^{\alpha \beta} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[(1 + \frac{1}{x})^x \right]^{\alpha \beta} = e^{\alpha \beta}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \ln(1+x) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \right]$$

$$\ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right], x = \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{x}, x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow \infty$$

$$\ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \ln \left[\lim_{u \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{u})^u \right] = \ln e = 1$$

$$4) y = e^x - 1 \Rightarrow e^x = 1 + y \Rightarrow x = \ln(1 + y)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1 + y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1 + y)}{y}} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{y}} \\ &= \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \ln(1 + y)} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \ln(1 + y)^{\frac{1}{y}}} , y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} , y \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow \infty \\ &= \frac{1}{\ln \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x} = \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

شکل عمومی مبهم 1^∞ : هرگاه لیمت تابع اکسپوننشیل $\lim_{x \rightarrow a} [u(x)]^{v(x)}$ شکل مبهم 1^∞ را به خود اختیار نماید، درین حالت تعویض $\alpha = u - 1$ را در نظر می گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} u^v = \lim_{x \rightarrow a} [(1 + u - 1)]^{\frac{v}{u-1} u-1} = \lim_{x \rightarrow a} \left[(1 + \alpha)^\alpha \right]^{\frac{v}{\alpha}} = \lim_{x \rightarrow a} \left[(1 + \alpha)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow a} (v\alpha)}$$

چون $\alpha = u - 1$ است، اگر $u \rightarrow 1$ پس $\alpha \rightarrow 0$ تقرب می کند؛ در نتیجه:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [u(x)]^{v(x)} &= \left[\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^\alpha \right]^{\lim_{x \rightarrow a} [v(u-1)]} = e^{\lim_{x \rightarrow a} [v(u-1)]} = e^P \\ \lim_{x \rightarrow a} [u(x)]^{v(x)} &= e^P , \quad P = \lim_{x \rightarrow a} [v(u-1)] \end{aligned}$$

مثال 1: قیمت لیمت $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^x$ را به دست آرید.

حل: نخست شکل مبهم لیمت را تعیین می نماییم؛ طوری که معلوم می شود شکل مبهم 1^∞ را دارد، بنابراین از فورمول استفاده می نماییم:

$$u = 1 + \frac{2}{x} , \quad v = x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^x = e^P , \quad P = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x(1 + \frac{2}{x} - 1) \right] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^x = e^P = e^2$$

مثال 2: قیمت لیمت $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}$ را به دست آرید.

حل: نخست قیمت شکل مبهم لیمت را تعیین می نماییم: $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}} = 1^\infty$

طوری که معلوم می شود، لیمت ذکر شده شکل مبهم 1^∞ را دارد؛ بنابراین از فورمول استفاده می نماییم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = e^P$$

$$u = 1 + \frac{1}{x}, \quad v = \frac{x-5}{2}$$

$$P = \lim_{x \rightarrow \infty} [v(u-1)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x-5}{2} \left(1 + \frac{1}{x} - 1\right) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x-5}{2} \left(\frac{1}{x}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-5}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = e^P = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

مثال 3: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = ?$

حل: باز هم در مرحله اول، شکل لیمت را تعیین می نماییم: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty$

همان طور که دیده می شود لیمت ذکر شده شکل مبهم 1^∞ را دارد؛ بنابراین از فورمول استفاده می نماییم:

$$u = \cos x, \quad v = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^P$$

$$P = \lim_{x \rightarrow 0} [v(u-1)] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} (\cos x - 1) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)}$$

$$\frac{\cos^2 x + \cos x - \cos x - 1}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x}{x(\cos x + 1)}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + 1} = -1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^P = e^0 = 1$$



لیمت های زیر را محاسبه نمایید؟

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+2}$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}$

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$

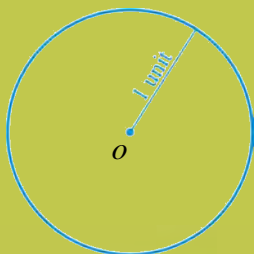
5) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$

لیمت توابع مثلثاتی

Trigonometric functions Limit

اگر شعاع یک دایره، یک واحد طول باشد، دایره

مذکور چه نوع دایره‌یی است؟



- در دایره مثلثاتی $C(o, r)$ زاویه مرکزی θ را رسم کنید.
 - از نقطه خارجی C به دایره مماس CA و عمود MB را رسم نمایید.
 - نقطه C را به مرکز دایره وصل کنید.
 - واحد اندازه گیری قوس مقابل زاویه مرکزی را نشان دهید.
- با استفاده از فعالیت فوق، قضیه زیر را بیان و ثبوت می‌کنیم:

قضیه: لیمت نسبت سین یک زاویه و خود زاویه مساوی با (1) است زمانی که زاویه به صفر

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad \text{تقریب نماید.}$$

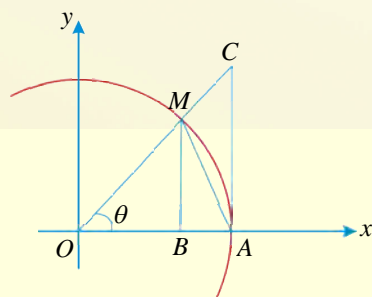
ثبوت: با در نظر داشت شکل زیر و با استفاده از مثلث های MOA ، COA و قطاع OMA مساحت‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\text{مساحت مثلث } OMA = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{BM} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \overline{BM} = \frac{\overline{BM}}{2}$$

$$\text{مساحت قطاع} = \frac{1}{2} \theta r^2$$

وسعت زاویه θ را باید به رادیان به دست آوریم:

$$\text{مساحت مثلث } COA = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \overline{AC} = \frac{\overline{AC}}{2}$$



مساحت مثلث‌های COA و MOA و مساحت قطاع OAM را با هم مقایسه و اطراف نامساوات را به $\frac{2}{r^2}$ ضرب نموده، داریم که:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BM}}{r} < \theta < \frac{\overline{AC}}{r} &\Rightarrow \sin \theta < \theta < \tan \theta \Rightarrow 1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{1}{\cos \theta} \\ &\Rightarrow \cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1 \Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} 1 \\ \text{می‌دانیم که } \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1 \text{ و } \lim_{\theta \rightarrow 0} 1 = 1 \text{ است؛ پس نظر به قضیهٔ ساندویچ } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \text{ می‌باشد.} \\ \text{می‌دانیم که ساین هر زاویهٔ اختیاری بین (1) و (-1) تحول دارد، بنابراین:} \end{aligned}$$

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$-\frac{1}{\theta} \leq \frac{\sin \theta}{\theta} \leq \frac{1}{\theta}$$

$$-\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \leq \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta}{\theta} \leq \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta}$$

به اساس قضیهٔ ساندویچ می‌توانیم بنویسیم:

$$\left. \begin{aligned} -\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} &= 0 \\ \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta}{\theta} = 0$$

در نتیجه گفته می‌توانیم که لیمت نسبت ساین زاویه و خود زاویه، وقتی که زاویه به بی‌نهایت تقرب نماید، مساوی با صفر است.

مثال 1: لیمت $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$ را پیدا کنید.

حل: اگر $2x = \alpha$ باشد پس $x = \frac{\alpha}{2}$ است، چون $x \rightarrow 0$ تقرب کرده، $\alpha \rightarrow 0$ تقرب می‌کند.

$$\frac{\sin \alpha}{\frac{\alpha}{2}} = 2 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad \text{که: می‌توانیم بنویسیم}$$

از مساوات فوق به دست می‌آید:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow 2 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 2 \cdot 1 = 2$$

مثال 2: لیمت $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \tan 2x}{7x}$ را دریابید.

حل:

$$\begin{aligned} \frac{5 \tan 2x}{7x} &= \frac{5 \frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x} = \frac{5 \sin 2x}{7x \cos 2x} = \frac{5 \cdot 2x \frac{\sin 2x}{2x}}{7x \cos 2x} = \frac{10 \frac{\sin 2x}{2x}}{7 \cos 2x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \tan 2x}{7x} &= \frac{10}{7} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\cos 2x} = \frac{10}{7} \end{aligned}$$

مثال 3: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x}$ را دریافت کنید.

حل: می‌دانیم که $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ است؛ پس:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

مثال 4: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$ را حساب کنید؟

حل:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \frac{\sin 3x}{3x}}{5x \frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{5x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 1} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

مثال 5: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{x^2}$ را حساب کنید.

حل: می‌دانیم که $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ است؛ پس:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{4x + 6x}{2} \sin \frac{4x - 6x}{2}}{x^2} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x \sin(-x)}{x^2} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{x} \end{aligned}$$

اگر $5x = y$ باشد هر گاه $x \rightarrow 0$ پس $y \rightarrow 0$ می‌کند در این صورت داریم که:

$$= 10 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 10 \cdot 1 \cdot 1 = 10$$



تمرین

لیمت‌های زیر را محاسبه کنید؟

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \frac{\pi}{6})}{x + \frac{\pi}{6}}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \tan^2 x}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x}$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x}$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x \cos 3x$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\cos 2x - \cos x + 1}$

9) $\lim_{x \rightarrow 1} (\cos^2 x + \sin^2 x)$

متادیت توابع

Continuity of Functions

به تصاویر دقت کنید.

پل اول و پل دوم چه فرقی با هم دارند؟



گراف‌های توابع اشکال مختلف دارند: بعضی از آنها به یک قلم رسم می‌شوند، یعنی بدون این که نوک قلم از روی کاغذ بلند شود توابع متصل یا متمادی رسم می‌شوند؛ اما بعضی از آنها به یک قلم رسم شده نمی‌توانند، یعنی در وقت رسم کردن گراف تابع نوک قلم یک و یا چند مرتبه از صفحه کاغذ بلند می‌شود، زیرا در یک قسمت گراف تابع قطع می‌گردد و دوباره به استقامت خود ادامه می‌یابد که این نوع توابع را غیر متصل یا غیر متمادی می‌نامند.



- گراف تابع $f(x) = x^2 + 4x$ را رسم کنید.
 - لیمت تابع $f(x)$ را در نقطه $x = 1$ دریافت کنید.
 - قیمت تابع $f(x)$ را در نقطه $x = 1$ بررسی و بعد هر دو رابطه را با هم مقایسه کنید؟
- از نتیجه فعالیت فوق می‌توانیم بنویسیم که:
- تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = a$ متمادی گفته می‌شود زمانی که شرط‌های زیر تحقق یابد:
- 1- نقطه a در ساحت تعریف $f(x)$ شامل باشد.
 - 2- تابع داده شده در نقطه a لیمت داشته باشد.
 - 3- قیمت $f(a)$ باید با لیمت $f(x)$ مساوی باشد $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

مثال 1: نشان دهید که تابع $f(x) = x^2 + 2x - 1$ در نقطه $x_0 = 2$ متمادی است.

حل: چون ساحت تعریف تابع اعداد حقیقی است:

1) $2 \in \text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

2) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 1) = 4 + 4 - 1 = 7$

3) $f(2) = 2^2 + 4 - 1 = 7$

بنابراین هر سه شرط متادیت در تابع فوق صدق می کند و تابع داده شده، یک تابع متمادی است.

مثال 2: متادیت تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ را در نقطه $x = -1$ تحقیق کنید:

حل: ناحیه تعریف تابع $f(x)$ عبارت از $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ است که -1 شامل آن نیست؛ پس داریم که:

1) $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{-3}{0} = \infty$

چون $x = -1$ در ناحیه تعریف شامل نیست، تابع در نقطه $x = -1$ متمادی نیست.

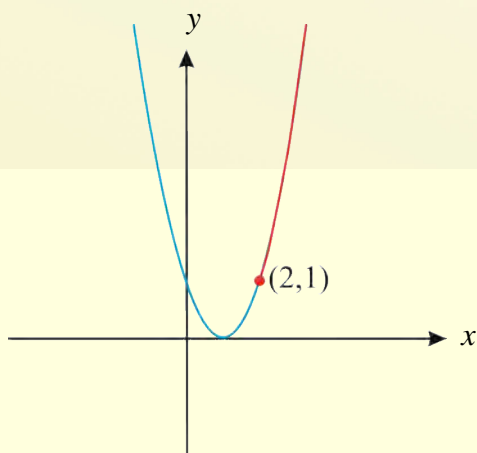
مثال 3: متادیت تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & ; x < 2 \\ x^2 - 3 & ; x \geq 2 \end{cases}$ را در نقطه $x = 2$ تحقیق نمایید:

حل: ابتدا لیمت های دست راست و چپ تابع را تحقیق می نماییم:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 3) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 2x + 1) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

در نتیجه گفته می توانیم که تابع فوق در نقطه داده شده

متمادی است که در شکل هم دیده می شود.



مثال 4: متعادیت تابع $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; x \geq 1 \\ 1-x & ; x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x=1$ تحقیق کنید.

حل:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x+1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 1-x = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

در نتیجه، گفته می‌توانیم که تابع در نقطه فوق متعادی نیست.

نتیجه: اگر تابع $g(x)$ در $x=a$ و تابع $f(x)$ در $x=g(a)$ متعادی باشد؛ پس تابع $f(g(x))$ در $x=a$ نیز متعادی است؛ یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = f(g(a))$$

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^\alpha = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} a^{f(x)} = a^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \log_a f(x) = \log_a (\lim_{x \rightarrow a} f(x))$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} \sin f(x) = \sin(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$$

مثال 5: اگر $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ ، $x \neq -3$ باشد، آیا تابع $f(x)$ در نقطه $x=-3$ متعادی است؟

حل: چون تابع در $f(-3)$ قابل تعریف نمی‌باشد، تابع در نقطه $x=-3$ متعادی نیست.

غیرمتعادیت: هرگاه تابع $f(x)$ در $x=a$ یکی از سه شرط متعادیت را نداشته باشد، می‌گوییم که $f(x)$ در a غیر متعادی است و a نقطه انفصال می‌باشد. انفصال سه نوع است:

1- نوع اول: تابع f در $x=a$ دارای لیمت‌های راست و چپ بوده ولی این لیمت‌ها مساوی با یکدیگر نمی‌باشند.

2- نوع دوم: اگر دست کم یکی از لیمت‌ها (راست و چپ) وجود نداشته باشد.

3- نوع سوم: در صورتی که تابع در یک نقطه دارای لیمت بوده ولی در آن تعریف نشده باشد (فقط یک نقطه خالی باشد).



1- به ذوق خود یک تابع بنویسید، گراف تابع مذکور را رسم کنید، ساحت تعریف آن را مشخص بسازید. و سپس متمادیت آن را نشان دهید.

2- به توابع زیر دقت کنید و نشان دهید که آنها در نقاط داده شده متمادی اند یا غیر متمادی:

$$a) f(x) = x^2 + 5(x-2)^7 ; x=3 \quad b) f(x) = \frac{x+3}{(x^2+2x-5)} ; x=-1$$

$$c) h(x) = \frac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} ; x=-2 \quad d) f(x) = \frac{1}{(x-3)^3} ; x=3$$

$$e) f(x) = |x-3| ; x=3 \quad f) g(x) = \frac{|x|}{x} ; x=0$$

$$g) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x}{x} & ; x \neq 0 \\ 3 & ; x = 2 \end{cases} \quad h) f(x) = \frac{x^2-9}{x+3} ; x=2$$

خواص توابع متمادی

آیا مساوات مقابل حقیقت دارد؟

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$(f \div g)(x) = f(x) \div g(x) \quad , \quad g(x) \neq 0$$



- اگر $f(x) = x^2 - 1$ باشد، متمادیت تابع را تحقیق نمایید.
 - اگر $g(x) = x + 3$ باشد، متمادیت تابع را تحقیق کنید.
 - متمادیت $f(x) + g(x)$ را تحقیق نمایید.
- نتیجه فعالیت فوق را به طور زیر بیان می‌نماییم:

نتیجه

اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x = c$ متمادی باشند؛ پس توابع زیر هر کدام در $x = c$ متمادی اند.

1. $f(x) + g(x)$ جمع توابع

2. $f(x) - g(x)$ تفریق توابع

3. $f(x) \cdot g(x)$ ضرب توابع

4. $\frac{f(x)}{g(x)}$ تقسیم توابع. $g(x) \neq 0$

مثال 1: اگر $f(x) = x^2 + 3x - 2$ و $g(x) = x^2 + 3x - 2$ باشد:

1- f و g در نقطه $x = 1$ متمادی است یا نه؟

2- تحقیق کنید که:

الف) $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ است.

ب) $f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$ در $x=1$ متمادی است یا غیرمتمادی؟

حل: ابتدا هر تابع را جداگانه تحقیق می‌نماییم که متمادی است یا خیر.

1) $Df(x) = IR$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3) = 4$

3) $f(1) = (1^2 + 3) = 4$

پس تابع f در نقطه $x=1$ متمادی است.

1) $Dg(x) = IR$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x - 2) = 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 2$

3) $g(1) = (1^2 + 3 \cdot 1 - 2) = 2$

به همین قسم تابع g در نقطه $x=1$ هم متمادی است.

2- حالا متمادیت حاصل جمع و حاصل ضرب توابع را تحقیق می‌نماییم:

الف)

$$f(x) + g(x) = x^2 + 3 + x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 3x + 1$$

1) $D(f(x) + g(x)) = IR$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 3x + 1) = 6$

3) $f(1) + g(1) = (1 + 3 + 1 + 3 - 2) = 6$

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)] = f(1) + g(1) = 6$$

$$(f + g)(x) = x^2 + 3 + x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 3x + 1$$

1) $D[(f + g)(x)] = IR$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} [(f + g)(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} [2x^2 + 3x + 1] = 6$

3) $(f + g)(1) = (2x^2 + 3x + 1)(1) = 6$

$$\lim_{x \rightarrow 1} [(f + g)(x)] = (f + g)(1) = 6$$

در نتیجه مجموع توابع متمادی در نقطه $x=1$ متمادی است.

ب)

$$f(x) \cdot g(x) = (x^2 + 3)(x^2 + 3x - 2) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 9x - 6$$

$$1) D(f \cdot g)(x) = IR$$

$$2) (f \cdot g)_{(1)} = 1^4 + 3 \cdot 1^3 + 1^2 + 9 \cdot 1 - 6 = 8$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} (f \cdot g)(x) = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f \cdot g)(x) = (f \cdot g)(1) = 8$$

در نتیجه ضرب توابع متمادی در نقطه $x = 1$ متمادی است.

مثال 2: هرگاه $f(x) = x + 1$ ، $g(x) = 3x - 2$ باشد، تحقیق نمایید که $f(x) \cdot g(x)$ در $x = 2$

متمادی است.

حل:

$$1) Dg(x) = IR$$

$$1) Df(x) = IR$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3x - 2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3$$

$$3) g(2) = 3x - 2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$$

$$3) f(2) = x + 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 3$$

$$f(x) \cdot g(x) = (x + 1)(3x - 2) = 3x^2 - 2x + 3x - 2 = 3x^2 + x - 2$$

$$D(f \cdot g)(x) = IR$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) \cdot g(x)] = 3(4) + 2 - 2 = 12$$

$$(f \cdot g)(2) = 3(4) + 2 - 2 = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) \cdot g(x)] = (f \cdot g)(2) = 12$$

در نتیجه به دست می آید که $f(x) \cdot g(x)$ متمادی است.



1- نشان دهید که در نقاط داده شده توابع متمادی اند.

$$1) f(x) = x^3 - 2(x+1)^5 \quad ; \quad x = 2$$

$$2) g(x) = \frac{x^2 + 3}{(x^2 - x + 5)(x^2 + 2x)} \quad ; \quad x = -1$$

$$3) h(x) = \frac{x\sqrt{x} + 1}{(x+2)^3} \quad ; \quad x = 4$$

2- شرح دهید که چرا تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2}}{x}$ در نقطه $x = 0$ غیرمتمادی است.

تقرب متحول: گفته می‌شود که متحول x به عدد معین a تقرب می‌کند، در صورتی که x حسب دلخواه به a نزدیک شود، یعنی تفاوت بین x و a از هر عدد کوچک ($\delta > 0$) کوچک‌تر گردد. مفهوم فوق به طور سمبولیک با عبارات معادل ذیل افاده می‌گردد:

$$\forall \delta > 0: |x - a| < \delta \quad \text{یا} \quad x \rightarrow a \quad \text{یا} \quad |x - a| \rightarrow 0$$

تقرب متحول از راست ($x \rightarrow a^+$): اگر یک ترادف متناقص قیمت‌های x وجود داشته باشد طوری که تدریجاً حسب دلخواه به a نزدیک شوند، چنانچه:

$$x: a + 0.1, a + 0.01, a + 0.001, a + 0.0001, \dots \rightarrow a^+$$

تقرب متحول از چپ ($x \rightarrow a^-$): در صورتی که ترادف متزاید قیمت‌های x تعیین شده بتواند طوری که تدریجاً حسب دلخواه به a نزدیک شوند، چنانچه:

$$x: a - 0.1, a - 0.01, a - 0.001, a - 0.0001, \dots \rightarrow a^-$$

بنابراین، تقرب متحول x به عدد a معادل است با تقرب از دو سمت (راست و چپ) یعنی:

$$x \rightarrow a \Leftrightarrow (x \rightarrow a^+, x \rightarrow a^-)$$

تعریف: هرگاه تابع $f(x)$ در یک انتروال باز که عدد a شامل آن است، تعریف شده باشد (ولو که در a غیر قابل تعریف باشد) و با تقرب متحول x به a ، $f(x)$ حسب دلخواه به عدد l نزدیک شود، گفته می‌شود که لیمت تابع $f(x)$ عبارت از l است زمانی که x به a تقرب

$$\text{کند و می‌نویسند که: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \quad \text{یا} \quad \begin{matrix} x \rightarrow a \\ f(x) \rightarrow l \end{matrix}$$

خواص لیمت: اگر f و g دو تابع و C, L و M اعداد حقیقی باشند طوری که

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = M \quad \text{باشد؛ می‌توانیم بنویسیم:}$$

- 1) $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L + M$
- 2) $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L - M$
- 3) $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \cdot M$
- 4) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0, \quad g(x) \neq 0$
- 5) $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow c} f(x)} = \sqrt{L}$

توابع بی نهایت کوچک: تابع $\varepsilon(x)$ در $x \rightarrow a$ بی نهایت کوچک نامی ده می شود، هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ باشد.

قضیه ساندویچ: هرگاه توابع $f(x)$, $g(x)$ و $h(x)$ برای هر x از یک انتروال باز که عدد a را در بر دارد (ولو برای $x \neq a$)، شرط $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ را صدق کند، در صورتی که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$ باشد؛ پس $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ است.

• اگر یک تابع شکل $\frac{0}{0}$ را داشته باشد برای پیدا کردن لیمت آن ابتدا تابع مذکور را توسط

تجزیه ساده می سازیم و بعداً آن را به دست می آوریم.

• لیمت تابع $f(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n}$ وقتی که $x \rightarrow \infty$ کند، عبارت است از:

1. اگر $m = n$ باشد، لیمت تابع مذکور عبارت است از $\frac{a_0}{b_0}$

2. اگر $m < n$ باشد، لیمت تابع مذکور عبارت است از 0

3. اگر $m > n$ باشد، لیمت تابع مذکور عبارت است از $\pm \infty$

• توابعی که اشکال مبهم $(\infty, -\infty)$ و $(0, \infty)$ را داشته باشند، برای دریافت لیمت آنها از مزدوج استفاده می کنیم و آنها را طوری ساده می سازیم که اشکال مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ را اختیار نمایند و بعداً لیمت آنها را به دست می آوریم.

• توابعی که شکل مبهم 1^∞ را به خود اختیار کنند برای به دست آوردن لیمت آنها از

فرمول $\lim_{x \rightarrow a} [u(x)]^{v(x)} = e^P$ ، $P = \lim_{x \rightarrow a} [v(u-1)]$ استفاده می نماییم.

• لیمت نسبت سین یک زاویه و خود زاویه مساوی به (1) است زمانی که زاویه به صفر

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \text{ تقریب نماید:}$$

• تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ متمادی گفته می شود وقتی که:

1. نقطه a در ساحة تعریف $f(x)$ شامل باشد.

2. تابع داده شده لیمت داشته باشد.

3. قیمت $f(a)$ باید با لیمت $f(x)$ مساوی باشد: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

تمرینات عمومی فصل اول

به هر سوال چهار جواب داده شده است جواب درست را انتخاب کنید؟

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin x}{x} - 1$$

- a) 2 b) -2 c) 1 d) 3

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 2} - 2$$

- a) $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{3}$ c) 0 d) 1

$$\lim_{x \rightarrow 1.4} (2x + 0.3) - 3$$

- a) 1 b) 3 c) 0 d) هیچ کدام

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x} - 4$$

- a) 1 b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} - 5$$

- a) $2 + \sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x} - 6$$

- a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 4

7- لیمت‌های زیر را دریابید؟

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$

2) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{3 + x}$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^2 - 7}$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^2 + x + 6}{x^3 - 3x + 4}$

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1}$

6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 5x - 18}{x^2 + 3x - 10}$

7) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x - \sqrt{3x - 2}}$

8) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x - 10}$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\tan bx}$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \cos x}$

$$11) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - x - 2}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) + \sin(a-x)}{\tan(a+x) + \tan(a-x)}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin x - \tan x}{x^2 \sin x}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \sin x + \sin^2 x}{x^2}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 3x \sin 2x}{x \tan 3x}$$

$$21) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin 3(\pi + u)}{\sin 8(\pi + u)}$$

$$23) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 - 8x + 5}$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{9x^2 - x + 5}{\sqrt{9x^4 + 1}}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x+3}{x+2} + \frac{2}{x^2 + 2x} \right)$$

$$14) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 2}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x + \sin^2 x}{ax^2}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}$$

$$24) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x + 4}{4x + \sqrt{x}}$$

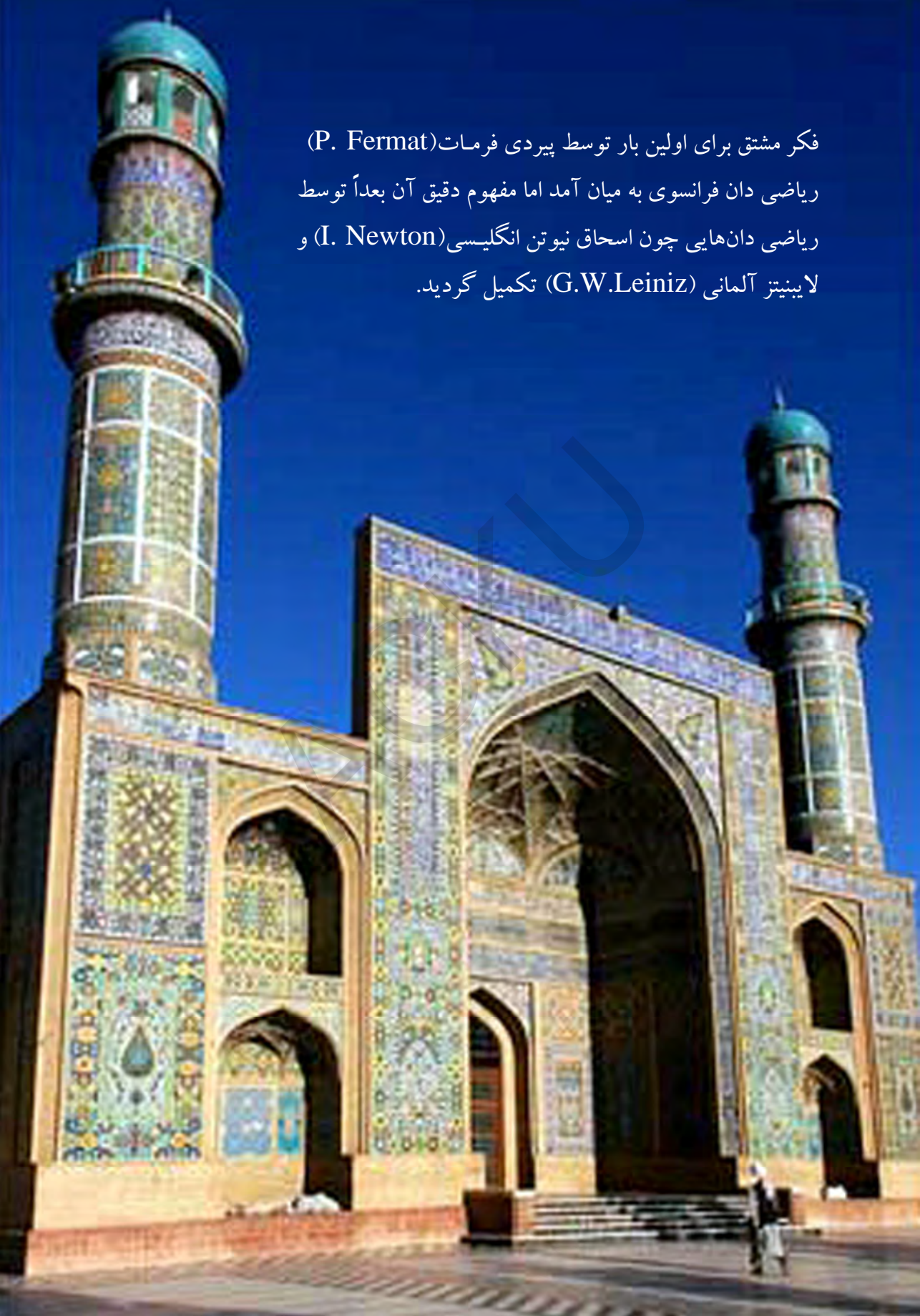
$$26) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} \right)$$



فصل دوم

مشتق

فکر مشتق برای اولین بار توسط پیردی فرمات (P. Fermat)
ریاضی دان فرانسوی به میان آمد اما مفهوم دقیق آن بعداً توسط
ریاضی دان‌هایی چون اسحاق نیوتن انگلیسی (I. Newton) و
لایبنیتز آلمانی (G.W.Leiniz) تکمیل گردید.



Derivatives

تابع $f(x) = x^2 - 1$ را در نظر گرفته و لیمت

کسر مقابل را دریابید؟

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = ?$$

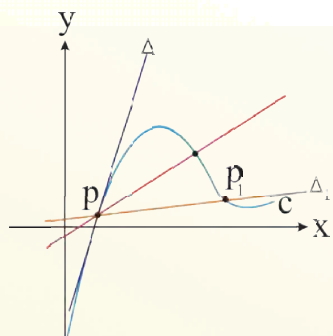
میل یک منحنی

- هرگاه دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ یک خط مستقیم معلوم باشد، میل آن از کدام رابطه به دست می آید.
 - آیا میل یک خط مستقیم در تمام نقاط آن ثابت و مساوی است؟ و یا با یک نقطه خاص ارتباط دارد؟
 - آیا میل یک خط مستقیم با زاویه‌یی که مستقیم با جهت مثبت محور x می‌سازد، ارتباط دارد؟
 - آیا میل یک خط مستقیم و یک منحنی یکسان به دست می آید؟
- از سوال‌های فوق معلوم می‌گردد که میل یک منحنی را به آسانی دریافت کرده نمی‌توانیم. زیرا خط منحنی در هر نقطه از مسیر خود، جهت خود را تغییر می‌دهد و در نقاط مختلف میل‌های مختلف دارد؛ از همین سبب، ابتدا میل یک خط منحنی را در یک نقطه آن تعریف نموده و بعد جهت محاسبه آن، یک فورمول به دست می‌آوریم.



- خط منحنی C را در سیستم کمیات وضعیه رسم و نقاط P و P_1 را بالای آن انتخاب کنید.
- در نقطه P_1 قاطع Δ_1 و در نقطه P مماس Δ را رسم کنید.

- اگر نقطه P_1 بالای منحنی C طوری حرکت نماید که به نقطه P نزدیک شود، در نتیجه خط



مستقیم Δ_1 با خط مستقیم Δ چه ارتباطی، پیدا می کند؟

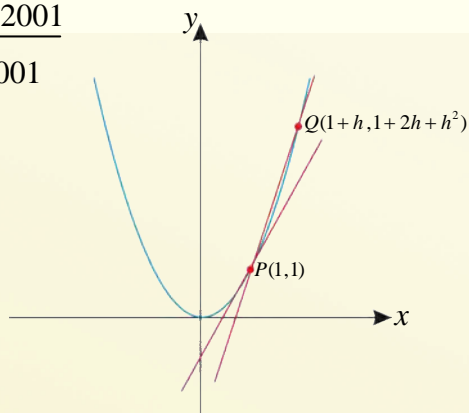
نتیجه فعالیت فوق را به طور زیر بیان می نمایم:

میل خط منحنی C در نقطه P برابر با میل خط مستقیم Δ یا \tan در نقطه P است.

مثال 1: میل منحنی تابع $y = f(x) = x^2$ را در نقطه $P(1,1)$ به دست آرید.

حل: چون میل منحنی با میل مماس در نقطه P باهم برابر است. پس میل این مماس را از فرمولی که دو نقطه آن معلوم باشد دریافت کرده نمی توانیم؛ زیرا در این جا تنها مختصات یک نقطه داده شده است. بنابراین می توانیم قیمت تخمینی میل این مماس را از میل قاطع که از نقاط P و Q می گذرد به دست آوریم در صورتی که نقطه Q به نقطه P نزدیک شود میل مماس PQ به 2 تقرب می کند که در جدول زیر دیده می شود:

x	2	1.5	1.1	1.01	1.001
y	4	2.25	1.21	1.0201	1.002001
$m_{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	3	2.5	2.1	2.01	2.001



به طور عمومی، ابتدا مختصه یی را که به نقطه $P(1,1)$ نزدیک است به $1+h$ نشان داده می توانیم که h یک عدد کوچک مثبت یا منفی است اما $h \neq 0$ می باشد؛ پس می توانیم بنویسیم:

$$f(1+h) = (1+h)^2 = 1+2h+h^2$$

بنابراین نقطه $(1+h, 1+2h+h^2)$ بالای منحنی واقع است. در نتیجه، میل خط مستقیمی که از نقاط $P(1,1)$ و $Q(1+h, 1+2h+h^2)$ می‌گذرد عبارت است از:

$$\frac{1+2h+h^2-1}{(1+h)-1} = \frac{2h+h}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2+h$$

اگر در شکل $h \rightarrow 0$ پس $Q \rightarrow P$ تقرب می‌نماید و خط قاطع PQ در نقطه $P(1,1)$ مماس می‌شود که این میل مماس را مشتق تابع گویند؛ یعنی: $\overline{PQ} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2$

این عملیه لیتم برای ما این امکان را می‌دهد که میل منحنی تابع $y = x^2$ را در یک نقطه اختیاری $P(x, y)$ به دست آوریم. هرگاه مختصات نقطه Q ، $[x+h, (x+h)^2]$ باشد اگر میل PQ را در نقطه P به m و میل مماس را به m_T نشان دهیم، داریم که:

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{x+h-x} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

$$m_T = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

پس به صورت عموم هرگاه نقاط $P[x, f(x)]$ و $Q[x+h, f(x+h)]$ دو نقطه کیفی منحنی مذکور باشند، خارج قسمت پایین را که به نام خارج قسمت Newton معروف است، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$m_T = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

و میل منحنی در هر نقطه اختیاری آن عبارت است از:

مثال 2: میل منحنی تابع $f(x) = x - x^2$ را در نقطه $P(2,0)$ دریابید.

حل: خارج قسمت Newton را تشکیل داده و در نقطه $x = 2$ میل منحنی را محاسبه می‌نماییم:

$$\begin{aligned} m_T &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h) - (2+h)^2 - 2 + 2^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2+h-4-4h-h^2-2+4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-4h-h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h+h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-3-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-3-h) = -3 \end{aligned}$$

تغییر اوسط یا تغییر متوسط

هرگاه یک جسم بر روی یک خط مستقیم در حرکت باشد، طبیعی است که فاصله طی شده تابع

زمان است؛ یعنی: $S = f(t)$

خارج قسمت $\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ در زمان t_1 و t_2 سرعت وسطی جسم نامیده می‌شود و سرعت در

زمان t_0 عبارت از لیمیت آن است که به نام سرعت لحظه‌ای یاد می‌گردد.

در زمان t_0 و t می‌توان لیمت رابطه فوق را چنین نوشت:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S - S_0}{t - t_0} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

در نتیجه گفته می‌توانیم که تغییر متوسط عبارت از نسبت تزايد تابع بر متحول می‌باشد:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(s_2) - f(s_1)}{t_2 - t_1}$$

مثال: تغییرات متوسط تابع $y = f(x) = x^2$ را در انتروال $[2, 5]$ دریابید.

حل: چون $x_1 = 2$ و $x_2 = 5$ است، نظر به تعریف می‌توانیم بنویسیم که:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{5^2 - 2^2}{5 - 2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{25 - 4}{5 - 2} = \frac{21}{3} = 7$$



1- در توابع زیر برای متحول x تزايد Δx و برای y تزايد Δy را در نظر گرفته، نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ و

میل منحنی را در نقاط خواسته شده دریابید.

1) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = ?$, $f(x) = 2x^2 - 4$, (0)

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = ?$, $f(x) = 2x - x^2$, (3)

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = ?$, $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$, (2, -1)

2- تغییرات متوسط تابع $f(t) = 5t^3 - 3t + 1$ را در انتروال $[2, 4]$ دریابید؟

مشتق یک تابع

لیمیت مقابل چه را نشان می دهد؟ آیا می توانیم

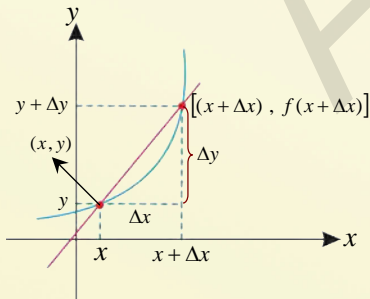
آن را به شکل دیگری بنویسیم؟

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



- هرگاه تابع $y = f(x)$ در انتروال $[a, b]$ متمادی باشد، اگر متحول x به اندازه Δx تزايد کند، آیا تزايد تابع به وجود می آید؟ در این صورت، رابطه تزايد متحول و تابع را بنویسید.
- نسبت تزايد تابع بر تزايد متحول $(\frac{\Delta y}{\Delta x})$ را طوری بنویسید که در مساوات تغییر به وجود نیاید.
- اگر از اطراف این ارتباط لیمیت اخذ گردد و Δx به طرف صفر تقرب نماید این لیمیت را به نام چه یاد می کنند؟

نتیجه فعالیت فوق را به طور زیر به دست آورده و بیان می نماییم:



$$y = f(x)$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad / \quad \div \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

تعریف: لیمیت نسبت تزايد تابع بر متحول وقتی که تزايد متحول به طرف صفر تقرب نماید، به نام

مشتق تابع یاد می شود؛ مانند: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ که آن را به $f'(x)$ یا y' ، $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{df}{dx}$ نمایش می دهند.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = y' = f'(x)$$

مثال 1: هرگاه تابع $f(x) = 2x$ باشد مشتق این تابع را دریابید.

حل: با استفاده از تعریف مشتق می‌توانیم بنویسیم که:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x) - 2x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x + 2\Delta x - 2x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} \Rightarrow f'(x) = 2$$

مثال 2: مشتق تابع $f(x) = x^3$ را دریابید.

حل:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = 3x^2 + 3x(0) + 0^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

مثال 3: مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ را دریابید.

حل: قبل از حل، حالت $x \geq 0$ را در نظر می‌گیریم:

الف: هرگاه $x > 0$ باشد، با استفاده از تعریف مشتق می‌توانیم بنویسیم که:

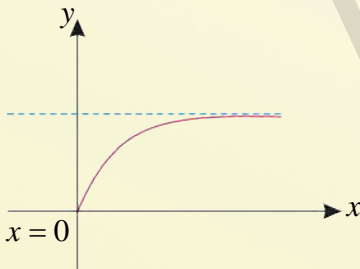
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ب: اگر $x = 0$ شود؛ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$ موجود

نمی‌باشد؛ پس تابع $y = \sqrt{x}$ در نقطه $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست، که در شکل دیده می‌شود؛ یعنی اگر x بسیار زیاد بزرگ شود میل مماس به صفر نزدیک می‌گردد و در نقطه $x = 0$ میل مماس $(\frac{1}{2\sqrt{x}})$ زیاد بزرگ می‌شود و بالاخره مماس به یک خط عمود تبدیل می‌گردد.



تمرین

مشتق توابع زیر را به کمک تعریف مشتق به دست آرید.

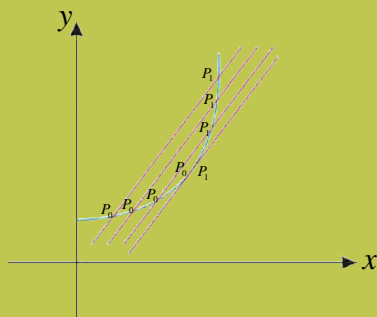
1) $f(x) = x - x^2$

2) $f(x) = -2x^2$

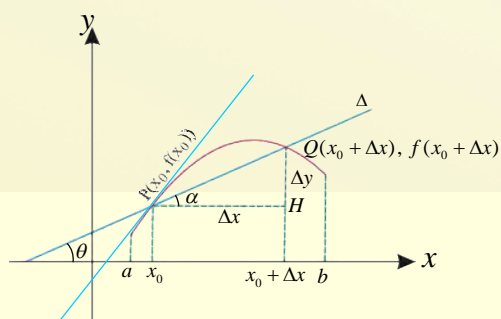
3) $f(x) = 2x^2 + x$

تعبیر هندسی مشتق

در شکل مقابل چه می‌بینید، در مورد آن مباحثه نمایید.



- منحنی تابع $f(x)$ را طوری که در انتروال $[a, b]$ متمادی باشد در مستوی کمیات وضعیه رسم و نقاط $P(x_0, f(x_0))$ و $Q(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ را بالای آن انتخاب کنید.
- خط مستقیم Δ را طوری رسم نمایید که از نقاط P و Q منحنی بگذرد.
- خط مستقیم Δ با جهت مثبت محور x چه نوع زاویه‌یی را تشکیل می‌دهد؟
- نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ یا $\frac{HQ}{HP}$ را به نام چه یاد می‌کنند؟
- هرگاه نقطه Q به نقطه P بی‌نهایت نزدیک شود ($\Delta x \rightarrow 0$)، خط مستقیم Δ به چه نوع خط مستقیم تبدیل می‌گردد؟ در شکل جداگانه نشان دهید.
- لیمت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را در صورتی که $\Delta x \rightarrow 0$ کند، در نقطه $P(x_0, f(x_0))$ تحقیق نمایید.



نتیجه فعالیت فوق را به طور زیر بیان می‌نماییم:

مشتق منحنی تابع $f(x)$ در نقطه $P(x_0, f(x_0))$ عبارت از میل مماس در این نقطه است؛ یعنی:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \tan \alpha = \tan \theta = m_{\Delta}$$

تعریف: میل مماس در نقطه تماس منحنی عبارت از مشتق همان تابع در همان نقطه می‌باشد؛ یا به عبارت دیگر، تانجانت زاویه‌یی است که مستقیم Δ با جهت مثبت محور x می‌سازد.

مثال 1: میل و معادله مماسی را دریابید که با منحنی تابع $f(x) = 2x^3 - 1$ در نقطه $A(1,1)$ ترسیم می‌گردد.

حل: می‌دانیم که $m = \tan \alpha = f'(x)$ است؛ پس می‌توانیم بنویسیم که:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 1 \\ f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x)^3 - 1 - (2x^3 - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2[x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + (\Delta x)^3] - 1 - 2x^3 + 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - 2x^3 + 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x[6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [6x^2 + 6x(\Delta x) + 2(\Delta x)^2] = 6x^2 \end{aligned}$$

از اینرو میل مماس در نقطه $A(1,1)$ عبارت است از:

$$m = f'(x) = f'(1) = 6x^2 = 6 \cdot 1^2 = 6$$

پس معادله مماس آن عبارت است از:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 6(x - 1) \Rightarrow y = 6x - 5$$

مثال 2: میل مماس تابع $y = x^2 + 1$ را در نقطه $x_0 = 2$ نشان دهید.

حل:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + 1 - (x_0^2 + 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2(\Delta x)x_0 + (\Delta x)^2 + 1 - x_0^2 - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x[2x_0 + (\Delta x)]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [2x_0 + (\Delta x)] = 2x_0 \end{aligned}$$

$$m = y' = 2x_0 = 2 \cdot 2$$

$$y' = m = 4$$

مثال 3: مشتق تابع $y = f(x) = x^2$ را در نقطه $x = x_0$ و به‌طور خاص در نقطه $x_0 = 2$ دریابید.

$$x = x_0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

حالا از روش پیدا کردن لیمیت استفاده می کنیم: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$ چون

$x_0 = 2$ است؛ پس $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ یعنی در نقطه $x_0 = 2$ مشتق اول تابع $y = f(x) = x^2$ مساوی به 4 است. این بدین معنی است که 4 میل مستقیم در نقطه $x_0 = 2$ است.

مثال 4: مشتق تابع $f(x) = x^3$ را دریابید.

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x[3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2]}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0(\Delta x) + (\Delta x)^2$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2] = 3x_0^2$$

پس مشتق تابع $f(x)$ در نقطه x_0 مساوی به $f'(x_0) = 3x_0^2$ است.

مثال 5: در نقطه x_0 مشتق تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را دریابید؟

ثبوت:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0}$$

$$f(x_0) + \Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$$

$$\Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - f(x_0)$$

$$\Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0}$$

$$\Delta y = \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x \cdot x_0(x_0 + \Delta x)} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$

$$f'(x_0) = \frac{-1}{x_0(x_0 + 0)} = \frac{-1}{x_0^2}$$

بنابراین مشتق تابع $f(x)$ در نقطه x_0 مساوی به $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ است.



1- مشتق توابع زیر را دریابید؟

1) $f(x) = 5x^2 - 2$

2) $f(x) = \frac{2}{x}$

2- مشتق توابع زیر را در نقاط داده شده پیدا کنید؟

1) $f(x) = 4x^2$, $x_0 = \frac{1}{2}$

2) $f(x) = 3x - 1$, $x_0 = -1$

قوانین مشتق

آیا می‌توان مشتق تابع مقابل را بدون طریقهٔ نزاید پیدا کرد؟

$$f(x) = 2x^2$$

1. مشتق یک عدد ثابت:



- تابع $y = C$ (عدد ثابت) را در نظر بگیرید:
- متحول را به اندازه Δx نزاید دهید، دربارهٔ نزاید تابع چه فکر می‌کنید؟
 - نسبت نزاید تابع و متحول را تشکیل دهید.
 - از اطراف مساوات فوق لیمت اخذ نمایید طوری که $\Delta x \rightarrow 0$ تقرب کند.
- نتیجهٔ فعالیت فوق را به طور زیر بیان می‌نماییم:

هرگاه $y = C$ یک تابع ثابت باشد گراف آن یک خط افقی و میل آن صفر است؛ یعنی: میل مماس صفر بوده؛ که در حقیقت مشتق تابع ثابت صفر می‌باشد.

ثبوت:

$y = C$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C - C}{\Delta x}$
$y + \Delta y = C$	
$\Delta y = C - y$	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x}$
$\Delta y = C - C$	$y' = 0$

مثال: مشتق تابع $f(x) = \pi^4$ و $f(x) = 100$ را دریابید.

حل: چون π^4 و 100 عددهای ثابت اند:

$$f(x) = C \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = \pi^4 \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = 100 \Rightarrow f'(x) = 0$$

2. مشتق یک تابع طاقت دار:



- تابع $y = x^n$ را که n عدد طبیعی و $n \geq 1$ باشد در نظر بگیرید.
 - متحول را به اندازه Δx تزايد دهید، آیا تابع نیز تزايد می نماید یا خیر؟ اگر می نماید، به کدام اندازه؟ رابطه آن را بنویسید.
 - از این رابطه قیمت Δy را دریافت و نسبت تزايد تابع و متحول را تشکیل دهید.
 - از اطراف مساوات فوق در صورتی لیمت بگیرید که $\Delta x \rightarrow 0$ کند.
- نتیجه فعالیت فوق را به طور زیر ثبوت می نمایم:

ثبوت:

$$y = x^n$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n \Rightarrow \Delta y = (x + \Delta x)^n - y$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta y = (x + \Delta x - x)[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}]$$

$$\Delta y = \Delta x[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}]$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}]}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}]$$

$$y' = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1}}_{\text{دفعه } n \text{ } x^{n-1}}$$

$$y' = nx^{n-1}$$

مثال 1: مشتق تابع $f(x) = x^5$ را در نقطه $x = \frac{1}{2}$ دریابید.

حل:

$$f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^{5-1} \Rightarrow f'(x) = 5x^4$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 5 \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$



تمرین

مشتق توابع زیر را دریابید؟

1) $f(x) = x^{-2}$

2) $x(t) = gt^2$

3) $t(x) = x^8$

4) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

5) $f(x) = 10^{10}$

3. مشتق حاصل جمع:



توابع مشتق پذیر u و v را در نظر بگیرید:

- آیا تابع $y = u + v$ هم مشتق پذیر است؟
 - در تابع $y = u + v$ ، u را به اندازه Δu و v را به اندازه Δv زیاد دهید، در مورد زیاد تابع y چه فکر می کنید؟ اندازه آن را بنویسید؟
 - ابتدا زیاد تابع را دریافت کرده و اطراف مساوات را به Δx تقسیم کنید و سپس قیمت آن را در صورتی دریابید که $\Delta x \rightarrow 0$ کند.
- نتیجه فعالیت فوق را به طور زیر ثبوت می نماییم:

ثبوت:

$$y = u + v$$

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$

$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - y$$

$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - u - v$$

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\text{چون } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u' \text{ و } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v' \text{ است؛ } y' = u' + v'$$

4. مشتق حاصل تفریق:

اگر $y = u - v$ باشد، پس $y' = u' - v'$ است.

ثبوت آن کارخانه گی شاگردان است.

مثال 1: مشتق تابع $y = 2x + 1$ را دریابید.

حل: دیده می شود که $u = 2x$ و $v = 1$ است؛ پس:

$$u' = 1 \cdot 2x^{1-1} = 2x^0$$

$$u' = 2$$

$$v' = 0$$

$$y' = u' + v' \Rightarrow y' = (2x)' + (1)' \Rightarrow y' = 2 + 0 \Rightarrow y' = 2 \quad \text{لذا:}$$

مثال 2: مشتق تابع $y = 4x^2 - 3x + 5$ را دریابید.

حل: در این تابع $u = 4x^2$ ، $v = 3x$ و $w = 5$ است که $u' = 8x$ ، $v' = 3$ و $w' = 0$ می باشد؛ بنابراین:

$$y' = u' + v' + w'$$

$$y' = (4x^2)' - (3x)' + (5)'$$

$$y' = 8x - 3$$

مثال 3: مشتق توابع زیر را دریابید.

$$1) \quad y = 12x - 7$$

$$y' = (12x)' - (7)'$$

$$y' = 12$$

$$2) \quad f(x) = 9x^2 - 12x + 4$$

$$f'(x) = (9x^2)' - (12x)' + (4)'$$

$$f'(x) = 18x - 12$$

$$3) \quad f(x) = 6x^3 - 2x^2 + 6x - 1$$

$$f'(x) = (6x^3)' - (2x^2)' + (6x)' - (1)'$$

$$f'(x) = 18x^2 - 4x + 6$$

5. مشتق حاصل ضرب:



اگر توابع u و v مشتق پذیر باشند، پس $u \cdot v$ هم مشتق پذیر است ازین رو تابع $y = u \cdot v$ را در نظر بگیرید.

- در تابع فوق u را به اندازه Δu ، v را به اندازه Δv تزايد دهید و تزايد تابع را دریابید.
- بعد از پیدا کردن تزايد تابع یعنی Δy اطراف مساوات را به Δx تقسیم نمایید.
- از رابطه فوق در صورتی لیمت بگیرید که $\Delta x \rightarrow 0$ کند.

نتیجه فعالیت فوق را به طور زیر ثبوت می نماییم:

ثبوت:

$$y = u \cdot v$$

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) \Rightarrow \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - y$$

$$\Delta y = u \cdot v + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u \cdot v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} = v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$y' = v \cdot u' + u \cdot v' + 0 \cdot v'$$

$$y' = u'v + v'u$$

مثال 1: مشتق تابع $y = x^3(x^2 - 3)$ را دریابید.

حل: می‌دانیم که تابع شکل $y = u \cdot v$ را دارد که در این صورت $y' = u'v + v'u$ می‌شود.

$$\left. \begin{array}{l} u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2 \\ v = x^2 - 3 \Rightarrow v' = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y = x^3(x^2 - 3) \\ y' = 3x^2(x^2 - 3) + 2x(x^3) \\ y' = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2 \end{array}$$

مثال 2: مشتق تابع $y = (5x - 1)^2$ را دریابید.

حل: تابع y را می‌توانیم به شکل ضرب دو فکتور بنویسیم:

$$y = (5x - 1)^2 = (5x - 1)(5x - 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} u = 5x - 1 \Rightarrow u' = 5 \\ v = 5x - 1 \Rightarrow v' = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y' = 5(5x - 1) + 5(5x - 1) \\ y' = 25x - 5 + 25x - 5 = 50x - 10 \end{array}$$

6. مشتق حاصل تقسیم:



اگر u و v دو تابع مشتق‌پذیر باشند؛ پس $\frac{u}{v}$ طوری که $v \neq 0$ باشد هم مشتق‌پذیر است اکنون

تابع $y = \frac{u}{v}$ را در نظر می‌گیریم:

• u و v را به ترتیب به اندازه $\Delta u, \Delta v$ تزايد دهید و در تابع $y = \frac{u}{v}$ تزايد y را دریابید.

• اطراف مساوات را به Δx تقسیم نمایید.

• از اطراف رابطه فوق لیمیت اخذ نمایید در صورتی که $\Delta x \rightarrow 0$ کند.

نتیجه فعالیت فوق را به طور زیر ثبوت می‌نماییم:

ثبوت:

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} \Rightarrow \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - y$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v \cdot \Delta u - uv - u \cdot v \Delta}{v(v + \Delta v)}$$

$$\Delta y = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)}}{\Delta x} = \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} \right) = \frac{v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (v + \Delta v)}$$

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

مثال 1: مشتق تابع $y = \frac{2+3x}{1-2x}$ را دریابید.

حل: دیده می شود که تابع شکل $\frac{u}{v}$ را دارد که مشتق آن عبارت است از:

$$\left. \begin{array}{l} u = 2 + 3x \Rightarrow u' = 3 \\ v = 1 - 2x \Rightarrow v' = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow y' = \frac{y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}}{\frac{3(1-2x) - [-2(2+3x)]}{(1-2x)^2}} = \frac{3-6x+4+6x}{(1-2x)^2} = \frac{7}{(1-2x)^2}$$

یادداشت

هرگاه بخواهیم مشتق یک تابع را در یک نقطه مشخص مانند x_0 دریافت نماییم، بعد از دریافت مشتق تابع داده شده قیمت نقطه مشخصه را در آن وضع می نماییم، که مشتق تابع را در همان نقطه ارائه می نماید.

مثال 2: مشتق تابع $f(y) = \frac{2y^2 - 3}{1 - 3y}$ را در نقطه $y = 0$ دریابید.

حل: با استفاده از مشتق حاصل تقسیم داریم که:

$$\left. \begin{array}{l} u = 2y^2 - 3 \Rightarrow u' = 4y \\ v = 1 - 3y \Rightarrow v' = -3 \end{array} \right\} \begin{aligned} f'(y) &= \frac{4y(1-3y) - [-3(2y^2-3)]}{(1-3y)^2} = \frac{4y - 12y^2 + 6y^2 - 9}{(1-3y)^2} \\ f'(y) &= \frac{-6y^2 + 4y - 9}{(1-3y)^2} \\ f'(0) &= \frac{-6(0)^2 + 4(0) - 9}{(1+0)^2} \\ f'(0) &= -9 \end{aligned}$$

مثال 3: مشتق تابع $f(t) = \frac{-3}{2t-1}$ را دریابید.

حل: می‌دانیم که تابع شکل $\frac{u}{v}$ را دارد، بنابراین از فرمول $y = \frac{u}{v}$ استفاده کرده چنین حل می‌نماییم:

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \\ u = -3 \Rightarrow u' = 0 \\ v = 2t - 1 \Rightarrow v' = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(t) = \frac{0 \cdot (2t-1) - 2(-3)}{(2t-1)^2} = \frac{6}{(2t-1)^2}$$

تمرین

مشتق توابع الجبری زیر را دریابید؟

1) $f(x) = \frac{3}{5}x(x-2)$

2) $g(x) = (2x-3)(x-3)$

3) $f(x) = (2x-1)^2$

4) $f(t) = \frac{t^2}{1-2t}$

5) $f(x) = \frac{1}{x^2-2}$

6) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

7) $f(x) = 3x^5 - 5x^2$

8) $f(x) = 7x + 3$

7- مشتق جذر مربع یک تابع:



تابع $y = \sqrt{x}$ را در نظر بگیرید:

- در تابع فوق متحول را به اندازه Δx تزايد داده و تزايد تابع را دریافت نمایید؟
 - از هر دو طرف رابطه به دست آمده به گونه‌ی لیمت اخذ نمایید که $\Delta x \rightarrow 0$ کند.
- نتیجه فعالیت فوق را به طور زیر ثبوت می‌نماییم:

ثبوت:

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$

صورت و مخرج طرف راست مساوات را ضرب مزدوج صورت می‌نماییم:

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{x + \Delta x - x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

مثال 1: مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x}(x^2 - 1)$ را به دست آرید.

حل: دیده می‌شود که تابع شکل $u \cdot v$ را دارد:

$$\left. \begin{array}{l} u = \sqrt{x} \Rightarrow u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ v = x^2 - 1 \Rightarrow v' = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 - 1) + 2x \cdot \sqrt{x} \\ f'(x) &= \frac{x^2 - 1}{2\sqrt{x}} + 2x\sqrt{x} = \frac{x^2 - 1 + 4x(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{x^2 - 1 + 4x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 - 1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

8- مشتق تابع \sqrt{u} :



- اگر y تابع u و u تابع x تغییری نیامده! و مشتق پذیر باشند، در مورد رابطه y نظر به u و u نظر به x چه فکر می کنید؟
- متحول u را به اندازه Δu زیاد داده و در مورد تزايد تابع Δy توضیح دهید.
- از هر دو طرف مساوات طوری لیمت بگیرید که $\Delta x \rightarrow 0$ کند.

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$

$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$

صورت و مخرج طرف راست مساوات را ضرب مزدوج صورت می نماییم:

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

اطراف مساوات را تقسیم Δx کرده و سپس از اطراف مساوات لیمت می گیریم، طوری که $\Delta x \rightarrow 0$ کند:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta u \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

مثال 2: مشتق تابع $h(x) = (x^2 + x)(\sqrt{x})$ را دریابید.

حل: با استفاده از تابع $y = u \cdot v$ و $y = \sqrt{x}$ می توانیم بنویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} u = x^2 + x \Rightarrow u' = 2x + 1 \\ v = \sqrt{x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} h'(x) &= (2x + 1)\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + x) \\ h'(x) &= 2x\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{x^2 + x}{2\sqrt{x}} \\ h'(x) &= \frac{4x^2 + 2x + x^2 + x}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 + 3x}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

مثال 3: مشتق تابع $f(x) = (\sqrt[3]{x} - 1)(x + 3)$ را در نقطه $x = 8$ به دست آرید.

حل: با استفاده از فرمول $y = u \cdot v$ و $y = \sqrt[n]{u}$ می توانیم این گونه عمل نماییم:

$$\left. \begin{array}{l} u = \sqrt[3]{x} - 1 \Rightarrow u' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ v = x + 3 \Rightarrow v' = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x + 3) + 1(\sqrt[3]{x} - 1) \\ f'(x) = \frac{x + 3}{3\sqrt[3]{x^2}} + (\sqrt[3]{x} - 1) \end{array}$$

اکنون مشتق تابع را در نقطه $x = 8$ دریافت می داریم: $f'(8) = \frac{8 + 3}{3\sqrt[3]{8^2}} + \sqrt[3]{8} - 1 = \frac{11}{12} + 1 = \frac{23}{12}$

تمرین

1- مشتق توابع زیر را دریابید؟

1) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

2) $f(x) = 3x^{-3}$

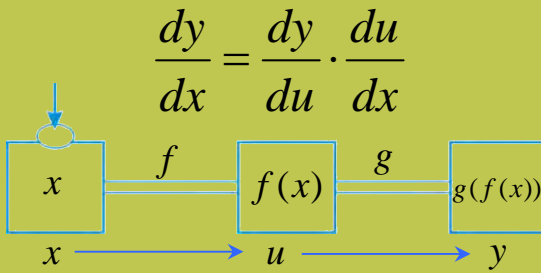
3) $f(x) = x^2 + 3$

2- اگر $f(x) = x^2 - 3x$ و $g(x) = \sqrt{x} - 1$ باشد؛ مشتق حاصل جمع، حاصل ضرب و حاصل

تقسیم این دو تابع را دریابید. $[(f + g)', (f \cdot g)', (f \div g)', g \neq 0]$

مشتق تابع مرکب (قاعده زنجیری) Chain Rule

در مورد رابطه و شکل مقابل نظر خود را بیان کنید.



اگر y تابع u و u تابع x و اشتقاق پذیر باشند.

- بگویید که y با u و u با x چه رابطه‌یی دارد؟
- آیا مساوات $\Delta y = \Delta u \cdot \frac{\Delta y}{\Delta u}$ حقیقت دارد؟
- اطراف مساوات فوق را به Δx تقسیم نمایید؟
- اگر مخارج‌های کسرهای سمت راست با هم تبدیل گردند، در رابطه فوق تغییر به میان می‌آید؟
- از اطراف رابطه فوق طوری لیمت بگیرید که $\Delta x \rightarrow 0$ تقرب نماید؟

نتیجه فعالیت فوق را به طور زیر ثبوت می‌نماییم:

مشتق تابع، تابع را ثبوت می‌کند و نتیجه آن به گونه زیر است:

$$\Delta y = \Delta u \cdot \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

ثبوت:

$$y'_{(x)} = y'_{(u)} \cdot u'_{(x)} \quad \text{است:} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_{(x)} \quad \text{و} \quad \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_{(u)}$$

بر اساس قاعده زنجیری، می‌توانیم نتایج زیر را بنویسیم:

$$1- \text{اگر } y = u^n \text{ باشد؛ پس: } y' = nu^{n-1} \cdot u'$$

$$y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \quad 2- \text{اگر } y = \sqrt[n]{u} \text{ باشد؛ پس:}$$

مثال: مشتق توابع زیر را پیدا کنید؟

$$\begin{array}{lll} 1) y = (2x^2 - 1)^3 & 2) y = \sqrt{1 - x^2} & 3) y = (x^2 - 3)^2 \cdot 2x^3 \\ 4) y = \sqrt[3]{x^2 - 2x^3} & 5) y = (x^2 - 2)^{-3} & \end{array}$$

حل: با استفاده از قاعده زنجیری می‌توانیم بنویسیم که:

$$\left. \begin{array}{l} 1) y = \underbrace{(2x^2 - 1)^3}_u \\ u = 2x^2 - 1 \Rightarrow u'_x = 4x \\ y = u^3 \Rightarrow y'_u = 3u^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y'_{(x)} = y'_{(u)} \cdot u'_{(x)} \\ y' = 3(2x^2 - 1)^2 \cdot 4x = 3(4x^4 - 4x^2 + 1) \cdot 4x \\ = (12x^4 - 12x^2 + 3) \cdot 4x = 48x^5 - 48x^3 + 12x \\ = 12x(4x^4 - 4x^2 + 1) = 12x(2x^2 - 1)^2 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2) y = \sqrt{1 - x^2} \\ u = 1 - x^2 \Rightarrow u'_{(x)} = -2x \\ y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \end{array} \right\} \Rightarrow y' = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

دیده می‌شود که تابع شکل یک حاصل ضرب را دارد؛ پس: $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u'v + v'u$

$$\left. \begin{array}{l} 3) y = (x^2 - 3)^2 \cdot 2x^3 \\ u = (x^2 - 3)^2 \\ u'_{(x)} = 2(x^2 - 3)(2x) \\ v = 2x^3 \Rightarrow v'_{(x)} = 6x^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y' = [(x^2 - 3)^2]' \cdot 2x^3 + [2x^3]'(x^2 - 3)^2 \\ y' = [2(x^2 - 3) \cdot 2x]2x^3 + 6x^2(x^2 - 3)^2 \\ = 8x^4(x^2 - 3) + 6x^2(x^2 - 3)^2 \\ = 8x^6 - 24x^4 + 6x^2(x^4 - 6x^2 + 9) \\ = 8x^6 - 24x^4 + 6x^6 - 36x^4 + 54x^2 \\ = 14x^6 - 60x^4 + 54x^2 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4) y = \sqrt[3]{x^2 - 2x^3} \\ u = x^2 - 2x^3 \\ u'_{(x)} = 2x - 6x^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = \sqrt[3]{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^{n-1}}} \\ y' = \frac{2x - 6x^2}{3\sqrt[3]{(x^2 - 2x^3)^2}} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 5) y = (x^2 - 2)^{-3} \\ u = x^2 - 2 \\ u'_{(x)} = 2x \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = u^n \Rightarrow y' = nu^{n-1} \cdot u' \\ y' = -3(x^2 - 2)^{-4} \cdot 2x = \frac{-6x}{(x^2 - 2)^4} \end{array}$$

یادداشت:

I. هرگاه تابع f در نقطه (x_0) مشتق پذیر باشد؛ پس $f'(x_0)$ میل مماس در نقطه $(x_0, f(x_0))$ است.

مثال: میل تابع $f(x) = x^3$ را در نقطه $x_0 = 1$ پیدا کنید.

حل: چون $x_0 = 1$ است؛ پس $f(x_0) = 1$ می شود و نقطه تماس می باشد که میل آن عبارت است از:

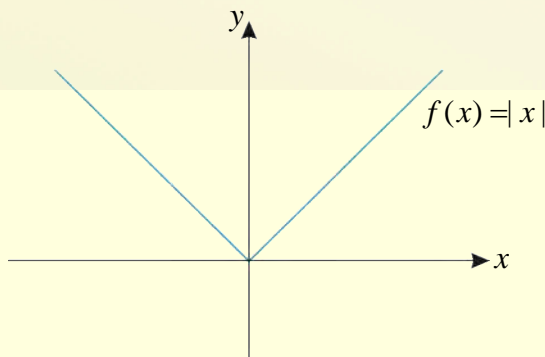
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3 \Rightarrow f'(1) = 3 \end{aligned}$$

II. اگر تابع f در نقطه $x = x_0$ مشتق پذیر باشد، این تابع در نقطه x_0 متمادی نیز است، اما عکس آن درست نیست؛ یعنی یک تابع می تواند در یک نقطه متمادی باشد، ولی در آن نقطه قابل اشتقاق نباشد.

مثال: مشتق تابع $f(x) = |x|$ را در نقطه $x = 0$ دریابید.

حل: می دانیم که مشتق در حقیقت دریافت لیمت نسبت تزايد متحول و تابع است، لذا لیمت های طرف چپ و راست (مشتقات طرف چپ و راست) آن را در صفر مطالعه می کنیم.

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \\ f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \end{aligned}$$



دیده می شود که $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ است؛ پس تابع f در نقطه $x=0$ مشتق پذیر نیست، اما در صفر متمادی است.



مشتق توابع زیر را به دست آرید؟

1) $y = (x^2 + 2)^2$

2) $y = (x^3 - 4x^2 + 1)^{-4}$

3) $y = (1 - 2x^3)^4$

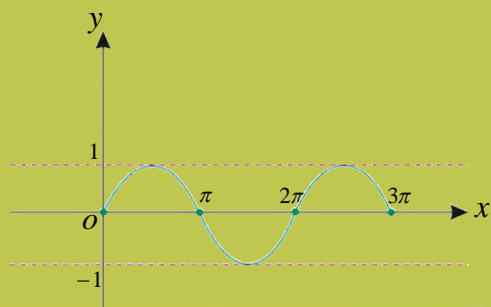
4) $y = \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$

5) $y = \sqrt[3]{3t+1}$

6) $y = \frac{1}{\sqrt{2+x^2+x^3}}$

مشتق توابع مثلثاتی

گراف مقابل چه نوع تابعی را نشان می‌دهد؟



- دایره مثلثاتی و رادیان را تعریف نمایید؟
- رابطه $-1 \leq \sin x \leq 1$ حقیقت دارد یا خیر؟
- تابع $y = \sin x$ را در نظر گرفته، متحول را به اندازه Δx تزیاید دهید و تزیاید تابع را در نظر بگیرید؟
- رابطه مثلثاتی $\sin(x + \Delta x) - \sin x$ را انکشاف دهید؟
- بعد از انکشاف رابطه فوق، نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را تشکیل داده و از اطراف مساوات طوری لیمت اخذ نمایید که $\Delta x \rightarrow 0$ کند؟
- نتیجه فوق را به طور زیر بیان و ثبوت می‌نماییم:

1- مشتق تابع $y = \sin x$:

ثبوت:

$$y = \sin x$$

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

$$\Delta y = 2 \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} = 2 \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot 2 \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} = 2 \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin \frac{\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \Rightarrow y'(x) = \cos x \cdot 1$$

$$y' = \cos x$$

$$\boxed{y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x}$$

اگر $y = \sin u$ و u تابع x باشد، می‌توانیم بنویسیم که: $f(u) = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$

مثال 1: مشتق تابع $y = f(x) = \sin 4x$ را به دست آرید.

حل:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \sin 4x \\ u = 4x \Rightarrow u' = 4 \\ f(x) = \sin u \Rightarrow y'_u = \cos u \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x) = \sin u \Rightarrow f'(x) = u' \cos u \\ f(x) = \sin 4x \Rightarrow f'(x) = 4 \cos 4x \end{array}$$

مثال 2: مشتق تابع $y = x^3 \cdot \csc x$ را به دست آرید.

حل:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 \cdot \csc x = x^3 \cdot \frac{1}{\sin x} \\ u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2 \\ v = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow v' = \frac{-uv'}{v^2} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x) = x^3 \cdot \csc x \\ f'(x) = 3x^2 \cdot \csc x + \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \cdot x^3 \\ = 3x^2 \csc x - \cot x \cdot \csc x \cdot x^3 \\ = 3x^2 \csc x - x^3 \cot x \cdot \csc x \end{array}$$

تمرین

مشتق توابع زیر را دریابید:

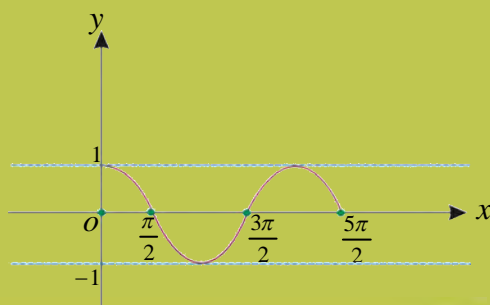
a) $y = \sin 5x$

b) $y = \frac{\sin x}{1+x}$

c) $y = \sqrt{1 + \sin x}$

مشتق تابع مثلثاتی $\cos x$

گراف مقابل چه نوع تابعی را نشان می دهد؟



- در تابع $y = f(x) = \cos x$ متحول را به اندازه Δx و بالمقابل تابع را به اندازه Δy تزايد دهید؟
- رابطه مثلثاتی $\cos(x + \Delta x) - \cos x$ را انكشاف دهید؟
- بعد از انكشاف رابطه فوق نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را تشكيل دهید و از اطراف ليمنت بگيريد به گونه يی كه $\Delta x \rightarrow 0$ کند.

نتیجه فعالیت فوق را به طور زیر بیان و ثبوت می نماییم:

2- مشتق تابع $y = \cos x$

ثبوت:

$$y = \cos x$$

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$

$$\Delta y = -2 \sin \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin \frac{x + \Delta x - x}{2}$$

$$\Delta y = -2 \sin \frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x \cdot 1$$

$$\boxed{y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x}$$

یا به گونه مختصر آنرا چنین ثبوت می نماییم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$(\cos x)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \cdot (-2 \sin x \cos x)$$

می دانیم که $\sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x$ است:

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos x} (-2 \sin x \cdot \cos x)$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

$$\boxed{y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \cdot \sin u}$$

اگر $y = \cos u$ و u تابع x باشد، می توانیم بنویسیم که:

مثال 1: مشتق توابع زیر را به دست آرید؟

1) $f(x) = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$

2) $f(x) = x - \sin x \cos x$

حل: می دانیم که $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + v' \cdot u$ است:

1) $f(x) = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$$f'(x) = (2 \sin x)' \cos x + (\cos x)' \cdot 2 \sin x = 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x$$

$$f'(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \Rightarrow y' = 2 \cos 2x$$

2) $f(x) = x - \sin x \cos x$

$$f'(x) = (x)' - (\sin x \cdot \cos x)' = (x)' - [(\sin x)' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot \sin x]$$

$$f'(x) = (x)' - [\cos x \cos x + (-\sin x \sin x)] = 1 - \cos 2x$$

تمرین

مشتق مرتبه اول توابع زیر را دریابید؟

1) $f(x) = (\sec 2x + \tan 2x)^2$

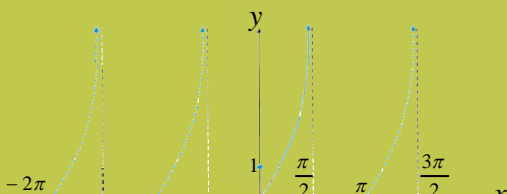
2) $f(x) = \sin^2 x$

3) $f(x) = \sec x$

4) $f(x) = \csc x$

5) $f(x) = \frac{5 \sin^2 2x}{3 \cos 5x}$

مشتق تابع مثلثاتی $y = \tan$



گراف مقابل چه نوع تابعی را نشان می‌دهد؟



- تابع $y = \tan x$ را به شکل نسبت مثلثاتی بنویسید؟
 - اگر از هر دو طرف نسبت فوق مشتق بگیریم، مساوی به چه می‌گردد؟
- نتیجه فعالیت فوق را چنین ثبوت می‌نماییم:
- 3- مشتق تابع مثلثاتی $y = \tan x$:**
- ثبوت:**

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \tan x$$

$$y'_{(x)} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

مشتق توابع متباقی را شاگردان ثبوت نمایند.

مثال 1: مشتق توابع مثلثاتی زیر را دریابید.

$$y = \tan^3 x$$

حل: می‌دانیم که $y = u^n$ است؛ پس مشتق آن $y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ می‌باشد:

$$\left. \begin{array}{l} u = \tan x \\ u' = \sec^2 x \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = \tan^3 x \\ y' = 3 \tan^2 x \sec^2 x \end{array}$$

مثال 2: مشتق تابع $y = \sec x \cdot \cot x$ را دریابید.

حل: چون که تابع شکل $y = u \cdot v$ را دارد؛ پس $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ است.

$$y = \sec x \cdot \cot x$$

$$u = \sec x \Rightarrow u' = \sec x \tan x$$

$$v = \cot x \Rightarrow v' = -\csc^2 x$$

قیمت‌های u, v, u' و v' را در فرمول $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ وضع می‌کنیم:

$$y' = \sec x \tan x \cdot \cot x + \sec x (-\csc^2 x)$$

$$= \sec x \tan x \frac{1}{\tan x} - \csc^2 x \sec x$$

$$= \sec x - \csc^2 x \sec x$$



مشتق توابع زیر را دریابید؟

a) $y = \tan x \cot x$

b) $y = (x^2 + x - 1) \tan^2 x$

c) $y = \frac{1}{\tan x}$

d) $y = \tan x \sec x - \cot x$

مشتقات ضمنی

مساوات مقابل را به شکل عبارت بنویسید؟

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$$



فعالیت

- مشتق تابع $y = 2x^2 - 4$ را دریابید؟
- تابع $y^2 + xy = 1$ تابعی چندمتحوله بوده و گراف آن چه شکلی دارد؟
- مشتق تابع فوق را دریابید.

نتیجه فعالیت فوق را چنین بیان می‌نماییم:

چون معادله یک خط منحنی در سیستم کمیات وضعیه عبارت از $y = f(x)$ است، از این جا $y - f(x) = 0$ گردیده و $y - f(x)$ یک تابع دو متحوله از جنس x و y می‌باشد. اگر $F(x, y) = y - f(x)$ را در نظر بگیریم، معادله این منحنی شکل $F(x, y) = 0$ را به خود می‌گیرد؛ به‌طور مثال اگر $F(x, y) = x^2 + y^2 - 25$ باشد؛ پس از معادله $F(x, y) = 0$ می‌توانیم بنویسیم $x^2 + y^2 - 25 = 0$ یا $x^2 + y^2 = 25$ که معادله این دو تابع مختلف عبارت است از: $y = \pm \sqrt{25 - x^2}$

به‌صورت عموم معادله $F(x, y) = 0$ می‌تواند معادله چندین تابع به شکل $y = f(x)$ باشد.

در تابع $y = f(x)$ که x و y آنها از هم جدا باشد؛ مشتق آن به آسانی دریافت می‌گردد. اما در بعضی از روابط x با y یکجا می‌باشد؛ مانند: $xy^2 - y + 1 = 0$ که در مشتق گرفتن آن اگر از جنس x مشتق بگیریم y را یک عدد ثابت فرض می‌نماییم و اگر از جنس y مشتق بگیریم، x را عدد ثابت فرض می‌کنیم؛ مانند:

$$xy^2 - y + 1 = 0$$

$$(xy^2)' - (y)' + (1)' = 0 \Rightarrow 1y^2 + x(2y'y) - y' = 0 \Rightarrow y^2 = -2xyy' + y' = y'(-2xy + 1)$$

$$y' = \frac{y^2}{-2xy + 1}$$

به صورت عمومی اگر رابطه ضمنی به شکل $f(x, y) = 0$ تعریف شده باشد، $y'_{(x)}$ را به طور مختصر محاسبه می‌نماییم:

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{\text{مشتق تابع نظر به } x \text{ (y ثابت است)}}{\text{مشتق تابع نظر به } y \text{ (x ثابت است)}}$$

مثال 1: مشتق ضمنی y را نظر به x در تابع $y = \sin \frac{x}{y} + 1$ در نقطه $(\pi, 1)$ به دست آرید.

حل: از رابطه $y - \sin \frac{x}{y} - 1 = 0$ ، $y'_{(x)} = \frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$ را دریافت می‌نماییم:

$$y - \sin \frac{x}{y} - 1 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} f'_{(x)} &= y'_x - \left(\sin \frac{x}{y}\right)'_x - (1)'_x \\ &= 0 - \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} - 0 = -\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} \\ f'_{(y)} &= y'_y - \left(\sin \frac{x}{y}\right)'_y - (1)'_y \\ &= 1 - \frac{\cos x}{y} \cdot \frac{-x}{y} - 0 = 1 + \frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}}{1 - \frac{\cos x}{y} \cdot \frac{-x}{y^2}} = \frac{\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y}}$$

حال در رابطه $y'_{(x)}$ ، قیمت x و y را وضع و $y'(\pi, 1)$ را دریافت می‌نماییم:

$$y'_{(\pi, 1)} = \frac{\frac{1}{1} \cos \frac{\pi}{1}}{1 + \frac{\pi}{1^2} \cos \frac{\pi}{1}} = \frac{\cos \pi}{1 + \pi \cos \pi} = \frac{-1}{1 - \pi}$$

مثال 2: مشتق ضمنی $x^2 y + 2y^3 = 3x + 2$ را دریابید.

$$x^2 y + 2y^3 = 3x + 2$$

$$x^2 y + 2y^3 - 3x - 2 = 0$$

$$f'_{(x)} = 2xy + 0 - 3 - 0 = 2xy - 3$$

$$f'_{(y)} = x^2 + 6y^2 - 0 - 0 = x^2 + 6y^2$$

$$f'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2xy - 3}{x^2 + 6y^2} = \frac{3 - 2xy}{x^2 + 6y^2}$$

مثال 3: مشتق ضمنی $y^6 - y - x^2 = 0$ را دریابید؟

$$f'_{(x)} = -2x$$

$$f'_{(y)} = 6y^5 - 1$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5 - 1} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

و یا به طریقه دیگر:

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

$$6y^5 y' - y' - 2x = 0$$

$$(6y^5 - 1)y' = 2x$$

$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

مشتق دوم ضمنی تابع

جهت به دست آوردن مشتق دوم رابطه ضمنی، ابتدا مشتق اول آن را دریافت می کنیم و بعداً از این رابطه دوباره مشتق می گیریم.

مثال 1: در رابطه $x^2 - y^2 = 1$ مشتق دوم $y''_{(x)}$ را دریابید.

حل:

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$f'_{(x)} = (x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x = 2x - 0 - 0 = 2x$$

$$f'_{(y)} = (x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y = 0 - 2y - 0 = -2y$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{(x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x}{(x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y} = -\frac{2x - 0 - 0}{0 - 2y - 0} = \frac{x}{y} \Rightarrow y'_{(x)} = \frac{x}{y}$$

یا به طریقه دیگر:

حال از رابطه $y' = \frac{x}{y}$ مشتق $y''_{(x)}$ را می گیریم:

$$y''_{(x)} = \frac{(x)'_y y - y' x}{y^2} = \frac{y - y' x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y} \cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = \frac{-1}{y^3}$$

مثال 2: مشتق ضمنی $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ را به دست آورده، سپس میل مماس را در نقطه $(1,1)$ دریافته و معادله آن را بنویسید.

حل: چون نقطه $(1,1)$ در معادله صدق می کند و این نقطه بالای منحنی قرار دارد، برای محاسبه $y'_{(x)}$ در معادله داده شده می توان نوشت:

$$f'_{(x)} = 2x + y$$

$$f'_{(y)} = x + 2y$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2x+y}{x+2y}, \quad x+2y \neq 0$$

$$y' = -\frac{2x+y}{x+2y} = -\frac{2+1}{1+2} = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -(x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$$

و یا به شکل زیر نیز می توان مشتق ضمنی تابع را دریافت کرد:

$$x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$$

$$2x + y + x \cdot y' + 2yy' = 0$$

$$2x + y + (x + 2y)y' = 0$$

$$(x + 2y)y' + 2x + y = 0$$

$$(x + 2y)y' = -2x - y$$

$$y' = \frac{-2x - y}{x + 2y}$$

مثال 3: مشتق ضمنی تابع $x^2y^3 = 5y^3 + x$ را دریابید.

حل:

$$x^2y^3 - 5y^3 - x = 0$$

$$f'_{(x)} = 2xy^3 - 0 - 1 = 2xy^3 - 1$$

$$f'_{(y)} = 3x^2y^2 - 15y^2 - 0$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2xy^3 - 1}{3x^2y^2 - 15y^2} = \frac{1 - 2xy^3}{3x^2y^2 - 15y^2}$$

تمرین

1. مشتق ضمنی رابطه $x \sin y + y \cos x = 5$ را دریابید؟

2. از رابطه $x^3 + xy^2 + y = 3$ مشتق ضمنی بگیرد؟

3. از رابطه $x^2 + y^2 = 4x + 4y$ مشتق ضمنی بگیرد؟

مشتقات مرتبه بلند

از تابع مقابل، سه مرتبه مشتق بگیرید.

از تابع مقابل، پنج مرتبه مشتق بگیرید.

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \cos x$$



فعالیت

• مشتق تابع $y = 2x^4 - 3x^3 - 2x - 1$ را دریابید؟

• مشتق دوم تابع فوق را به دست آرید؟

• مشتق سوم تابع فوق را به دست آرید؟

• چند مرتبه از تابع داده شده می توان مشتق گرفت؟

• مشتق چندم تابع مذکور مساوی به صفر است؟

نتیجه فعالیت فوق را به طور زیر بیان می نمایم:

هرگاه تابع $y = f(x)$ مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه اول آن $y' = f'(x)$ و مشتق مرتبه دوم آن $y'' = f''(x)$ و مشتق

مرتبه سوم آن $y''' = f'''(x)$... است. به شکل کلی، مشتق مرتبه n -ام تابع $y = f(x)$ را به علامت $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$

نشان می دهیم.

مثال 1: مشتق سوم تابع $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ را به دست آرید.

حل:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

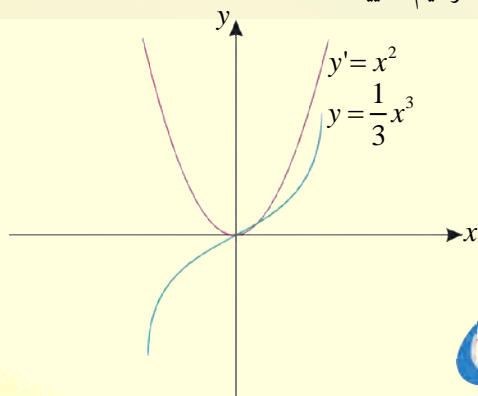
$$y' = 3x^2 - 6x + 4$$

$$y'' = 6x - 6$$

$$y''' = 6$$

مثال 2: گراف تابع $y = \frac{1}{3}x^3$ و گراف تابع مشتق اول آن را ترسیم نمایید.

حل:



$$y = \frac{1}{3}x^3$$

$$y' = \frac{3}{3}x^2 = x^2$$

$$y' = x^2$$

مثال 3: تابع $y = \sin x + \cos x$ داده شده است. ابتدا مشتق نهم آن را دریافت کرده و سپس مشتق حاصل جمع مربع مشتق نهم و y^2 را محاسبه کنید؛ یعنی $(y^{(9)})^2 + y^2 = 2$
حل: ابتدا مشتق مرتبه نهم $y^{(9)}$ را محاسبه می‌نماییم:

$$y = \sin x + \cos x$$

$$y'_{(x)} = \cos x + (-\sin x) = \cos x - \sin x$$

$$y''_{(x)} = -\sin x - (\cos x) = -\sin x - \cos x$$

$$y'''_{(x)} = -\cos x - (-\sin x) = \sin x - \cos x$$

⋮

$$f^{(9)}_{(x)} = \cos x - \sin x$$

$$\begin{aligned}(y^{(9)})^2 + y^2 &= (\cos x - \sin x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 \\ &= \cos^2 x - 2\sin x \cos x + \sin^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x \\ &= 2\sin^2 x + 2\cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2\end{aligned}$$

مثال 4: مشتق مرتبه پنجم تابع $y = 2x^6 - 3x^5 - 2x^3 - 3x^2 - 1$ را به دست آرید.

حل:

$$y = 2x^6 - 3x^5 - 2x^3 - 3x^2 - 1$$

$$y' = 12x^5 - 15x^4 - 6x^2 - 6x$$

$$y'' = 60x^4 - 60x^3 - 12x - 6$$

$$y''' = 240x^3 - 180x^2 - 12$$

$$y^{(4)} = 720x^2 - 360x$$

$$y^{(5)} = 1440x - 360$$

یادداشت: هرگاه تابع چندجمله‌ای $c_n \neq 0$ $f_{n(x)} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n$ داده شده باشد، مشتق $n - \text{ام}$ آن به طور زیر به دست می‌آید:

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n \quad c_n \neq 0$$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + nc_nx^{n-1}$$

$$f''(x) = 2c_2 + 6c_3x + \dots + n(n-1)c_nx^{n-2}$$

$$f'''(x) = 6c_3 + 12c_4x + \dots + n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)x \dots c_n = n!c_n$$

به صورت عمومی اگر $k > n$ باشد: $f^{(k)}(x) = 0$

تمرین

1- از توابع زیر آنجا تا وقتی مشتق بگیرید که مشتق آن‌ها صفر گردد.

1) $y = 4x^4 - 3x^3 - 2x$

2) $y = (5x - 2)^3$

3) $y = a + b + c^2 - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$

4) $y = \sin x$

- هرگاه نقاط $P(x, f(x))$ و $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ دو نقطه کیفی تابع $f(x)$ باشند. رابطه زیر به نام خارج قسمت Newton یاد می شود.

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- میل هر منحنی در یک نقطه کیفی عبارت است از: $m_T = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
- مشتق یک تابع: لیست نسبت تغییرات تابع و متحول طوری که $\Delta x \rightarrow 0$ تقرب کند، به نام مشتق تابع یاد می شود و به $f'(x)$ یا $\frac{dy}{dx}$ نشان داده می شود.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = y'$$

- هرگاه تابع $f(x)$ در نقطه (x_0) قابل اشتقاق باشد؛ $f'(x)$ میل مماس با منحنی در نقطه $(x_0, f(x_0))$ است.
- هرگاه تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ قابل اشتقاق باشد؛ تابع در نقطه x_0 متمادی است و برعکس آن درست نیست. اما ممکن است که تابع در یک نقطه متمادی باشد، اما در آن نقطه قابل اشتقاق نباشد.
- مشتق تابع $f(x)$ بالای منحنی C در نقطه $P(x_0, f(x_0))$ مساوی به میل مماس است.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \tan \alpha = \tan \theta = m_{\Delta}$$

- میل مماس یک منحنی در نقطه تماس به نام مشتق تابع در همان نقطه یاد می شود.
- هرگاه مشتق یک تابع گرفته شود، تابعی که به دست می آید به نام تابع مشتق یاد می شود.
- هرگاه تابع f در فاصله $(x_0 - r, x_0 + r)$ و در اطراف نقطه $x_0 = x$ تعریف شده و لیمیت آن موجود باشد در این حالت می توانیم یک خط مماس بالای منحنی تابع f در نقطه $x = x_0$ ترسیم کنیم. میل این مماس عبارت است از: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

قوانین مشتق:

$$1) f(x) = C \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$2) f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$3) f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$$

$$4) f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$$

$$5) f(x) = \frac{u}{v}, \quad v \neq 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$6) f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$7) f(x) = \sqrt{u} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$8) f(x) = \sqrt[n]{u} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

مشتق توابع مرکب: $y'_{(x)} = y'_{(u)} \cdot u'_{(x)}$

مشتق توابع مثلثاتی:

$$1) y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x, \quad y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$$

$$2) y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x, \quad y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u$$

اگر تابع $y = f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، به صورت عموم مشتق n -ام آن عبارت است

$$\text{از: } y^{(n)} = f^{(n)}(x)$$

تمرینات عمومی فصل دوم

به سوالات زیر چهار جواب داده شده است؛ از میان آنها، جواب صحیح را انتخاب کنید.

1- میل خط مماس با منحنی تابع $f(x) = x^2 - x$ در نقطه $P(3, 0)$ عبارت است از:

- a) 3 b) -3 c) 5 d) -5

2- تغییر متوسط تابع $f(x) = 2x^2$ در انتروال $[3, 4]$ عبارت است از:

- a) 18 b) 14 c) -14 d) 32

3- مشتق تابع $y = 2x^2 - 3x^{-1}$ عبارت است از:

- a) $y' = 4x^2 + 3$ b) $y' = 4x + \frac{1}{2}x$ c) $y' = 4x + \frac{3}{x^2}$ d) $y' = 4x$

4- مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ عبارت است از:

- a) 0 b) $\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ c) $\frac{x-1}{2\sqrt{x}}$ d) $\frac{-1}{2\sqrt{x-1}}$

5- معادله خط مماس یا خط منحنی تابع $f(x) = 2x^2 + x$ در نقطه $x = 1$ عبارت است از:

- a) $y = 5x - 5$ b) $y = x - 3$ c) $y = 5$ d) $y = 5x$

6- مشتق تابع $y = \frac{2x}{-x+4}$ عبارت است از:

- a) $y' = -4x + 8$ b) $y' = -2$ c) $y' = \frac{4x+8}{(-x+4)}$ d) $y' = \frac{8}{(-x+4)^2}$

7- مشتق تابع $y = (2-x^2)^3$ عبارت است از:

- a) $y' = -6x^5 + 2x^3 - 24x$ b) $y' = 3(2-x^2)^2$ c) $y' = 3(-2x)^2$ d) هیچ کدام

8- مشتق تابع $y = \sin x$ عبارت است از:

- a) $y' = \sin x$ b) $y' = \cos x$ c) $y' = -\sin x$ d) $y' = -\cos x$

9- مشتق تابع $y = (1+x^4)^{-\frac{1}{5}}$ عبارت است از:

- a) $y' = -\frac{4}{5}x^3(1+x^2)^{-\frac{6}{5}}$ b) $y' = -\frac{1}{5}(1+x^2)^{-\frac{6}{5}}$
c) $y' = -4x^3$ d) هیچ کدام

10- مشتق تابع $y = \frac{\cos x}{1-\cos x}$ عبارت است از:

- a) $y' = \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}$ b) $y' = \frac{-\sin x}{(1-\cos x)}$ c) $y' = \frac{-\sin x}{(1-\cos x)^2}$ d) هیچ کدام

سؤالات زیر را به تفصیل حل کنید.

1- مشتق تابع $f(x) = \frac{2 \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ را دریابید؟

2- مشتق تابع $f(x) = \frac{x + \sqrt{x - x^2}}{\sqrt{x} + \sqrt{1 - x}}$ را دریابید؟

3- مشتق تابع $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$ را دریابید؟

4- مشتق تابع $f(x) = (\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x} + 4)$ را دریابید؟

5- مشتق تابع $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ را در نقطه $\frac{\pi}{4}$ دریابید؟

6- مشتق تابع $f(x) = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 + \sin 2x}$ را دریابید؟

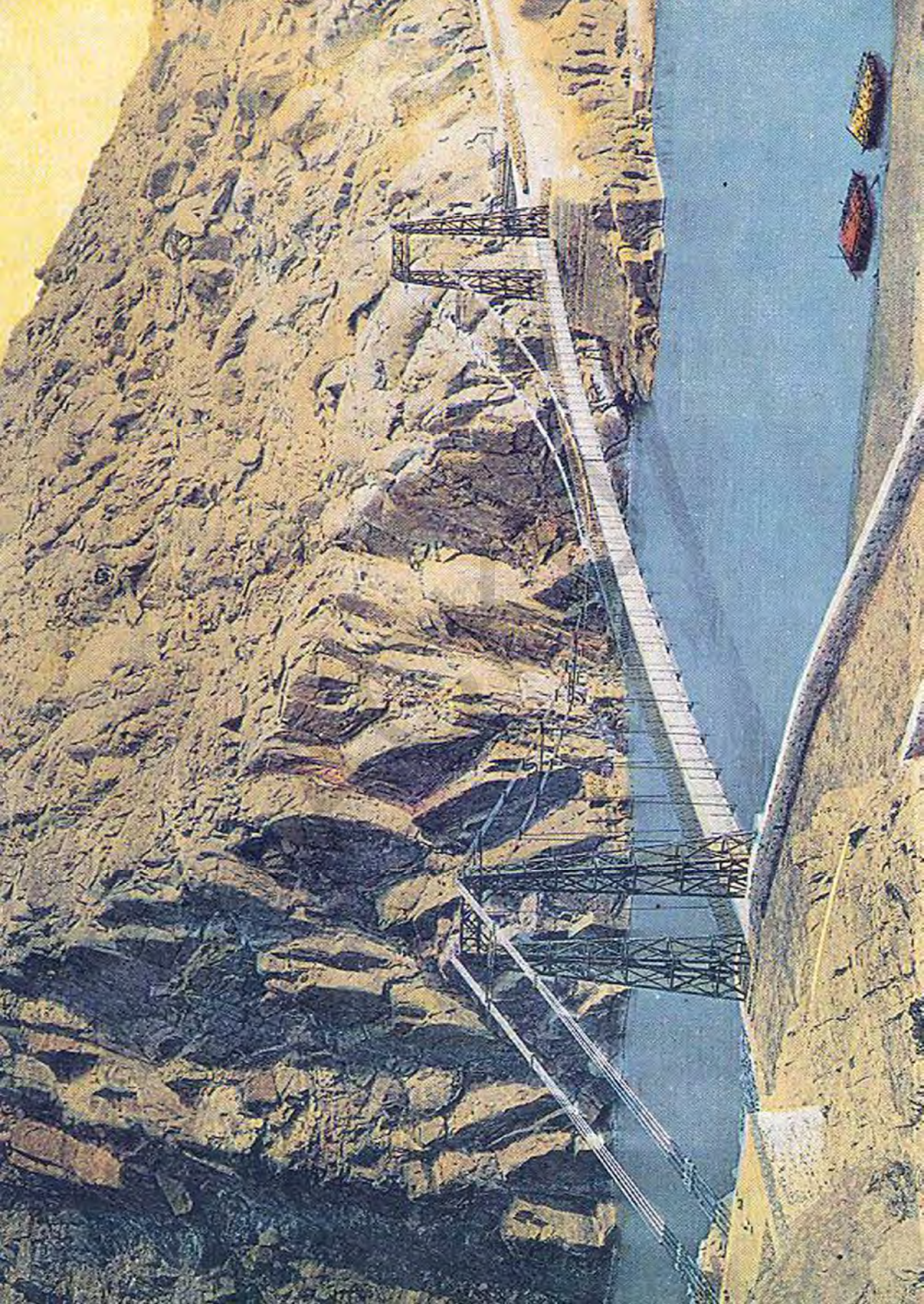
7- مشتق مرتبه هشتم $y = \cos x$ را دریابید؟

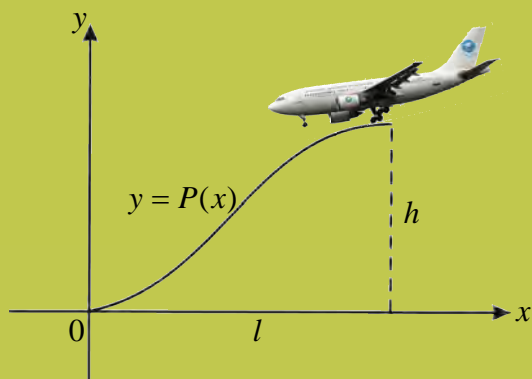
8- مشتق مرتبه نهم $y = \sin^2 x + \cos^2 x$ را دریابید؟

9- مشتق ضمنی تابع $x^2 + xy + y^2 = 3$ را دریابید؟

فصل سوم

موارد استعمال مشتق





موارد استعمال مشتق

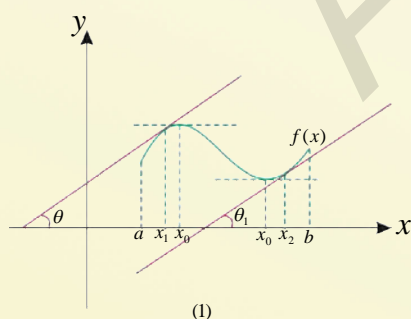
در مورد ارتفاع شکل مقابل نظر خود را بیان نمایید.

مشتق کاربرد فراوان دارد؛ مثلاً: در فیزیک تمام معادلات مربوط به حرکت، سرعت و تعجیل و همچنان در کیمیا تحولات تابع، دریافت بعضی لیمیت ها و ... با استفاده از مشتق حل می گردد. در اینجا بعضی از این موارد را تحت مطالعه قرار می دهیم:

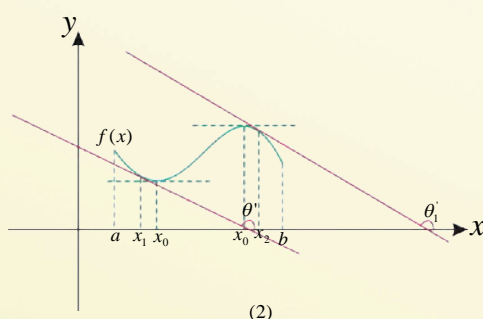
I- تحولات یک تابع



به اشکال زیر توجه کنید:



(1)



(2)

- توابع متزايد و متناقص چه نوع توابعی اند؟
- در شکل (1) در انتروال (a, b) میل مماس های رسم شده در نقاط x_1, x_0 و x_2 را با مماس های شکل (2) مقایسه کنید.

- در اشکال (1) و (2) بلند ترین و پایین ترین نقاط را مشخص کنید.
- در اشکال فوق نشان دهید که کدام تابع در کدام ناحیه متزايد و در کدام ناحیه متناقص است.

- در توابع متزايد، متناقص و ثابت مشتق را مطالعه کنید.

نتیجه فعالیت بالا را این طور بیان می کنیم:

1- اگر تابع $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ متمادی و در انتروال (a, b) مشتق پذیر باشد، اگر در

انتروال داده شده $f'(x) > 0$ باشد؛ تابع در همان انتروال متزايد گفته می شود.

2- اگر تابع $f(x)$ در انترول $[a, b]$ متمادی و در انتروال (a, b) مشتق پذیر؛ و در انتروال داده

شده $f'(x) < 0$ باشد در این صورت تابع در همان انتروال متناقص می باشد.

یادداشت: مراد از تزاید تابع این است که با ازدیاد قیمت متحول x ، قیمت تابع یا y افزایش یابد

و مقصد از تناقص تابع این است که با ازدیاد قیمت متحول x ، قیمت تابع یا y کاهش یابد.

مثال 1: نشان دهید که گراف تابع $f(x) = x^3 + 3x + 1$ متزايد است.

حل: چون تابع به شکل کسر نیست، تمام قیمت های اعداد حقیقی می تواند ناحیه تعریف آن شود.

همچنین می دانیم که شرط تابع متزايد $f'(x) > 0$ است، از این رو لازم است تا مشتق تابع مذکور را

تحت مطالعه قرار دهیم:

$$f(x) = x^3 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

دیده می شود که حد اول مشتق مربع تام بوده و همه قیمت های x همیشه مثبت است و وقتی با عدد

3 جمع شود باز هم قیمت آن مثبت می باشد؛ لذا $f'(x) > 0$ و تابع متزايد است.

مثال 2: تابع $f(x) = x^3 - 3x + 5$ به کدام انتروال متناقص است؟

حل: چون تابع $f(x)$ در هر انتروال متمادی و مشتق‌پذیر است و برای توابع متناقص داریم که $f'(x) < 0$ است:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 < 0$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3x^2 = 3$$

$$x = \pm 1$$

دیده می‌شود که مشتق تابع در انتروال $-1 < x < 1$ منفی است؛ پس تابع در همین انتروال $(-1, 1)$ متناقص می‌باشد.

مثال 3: تحولات تابع $y = 5x - 4$ را مطالعه کنید.

حل: ابتدا ساحة تعريف تابع را دریافته و بعداً شرط تزايد را مطالعه می‌نماییم:

$$D_f \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 5x - 4$$

$$f'(x) = 5 > 0$$

چون $f'(x) > 0$ است، تابع مذکور برای تمام قیمت‌های x متزايد می‌باشد.

مثال 4: به گراف تابع $y = x^2$ دقت کنید و سپس نشان دهید که تابع در کدام انتروال متزايد و در کدام انتروال متناقص است.

حل: می‌دانیم که اگر تابع متناقص باشد، $y' < 0$ و اگر تابع متزايد باشد، $y' > 0$ می‌باشد؛ بنابراین

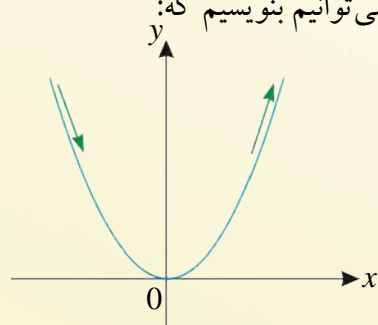
می‌توانیم بنویسیم که:

$$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$$

$$\text{شرط تناقص } y' < 0 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow x < 0$$

$$\text{شرط تزايد } y' > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$+\infty$	4	1	0	1	4	$+\infty$



به وضاحت در گراف تابع دیده می شود که تابع در انتروال $(-\infty, 0)$ متناقص و در انتروال $(0, +\infty)$ متزاید است.



1- تحولات تابع $y = ax + b$ را نشان دهید؟

2- تحولات تابع $y = \frac{-3}{4}x - 1$ را نشان دهید؟

3- نشان دهید که تابع $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ در کدام انتروال متزاید است؟

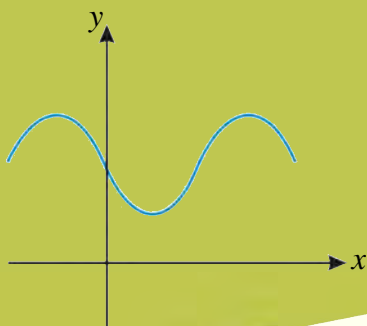
4- انتروال تزاید تابع $y = x^2 + 3x + 2$ را تعیین کنید؟

نقاط بحرانی (Extreme) یک تابع (اعظمی Maximum و اصغری Minimum)

در شکل مقابل، بلندترین و پایین‌ترین نقطه را

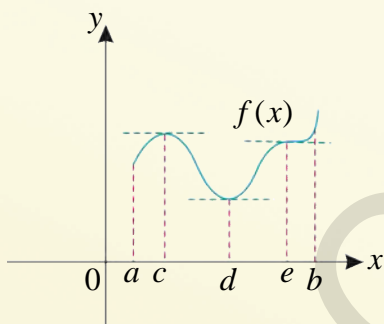
نشان داده و بگویید که این نقاط به نام چه یاد

می‌شوند؟



در شکل مقابل اگر تابع $f(x)$ در انتروال (a, b)

مشتق‌پذیر باشد:



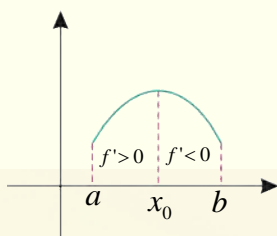
- با ازدیاد قیمت متحول در کدام انتروال قیمت تابع زیاد می‌شود؟
- با کم شدن قیمت متحول در کدام انتروال قیمت تابع کم می‌گردد؟
- تحولات تابع را در انتروال (c, d) و (d, e) مطالعه کنید.
- تابع $f(x)$ در کدام نقاط مساوی به صفر است؟

از فعالیت فوق نتیجه را این گونه بیان می‌کنیم:

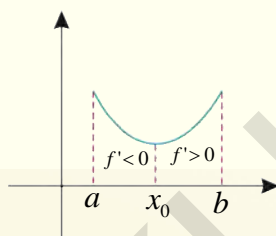
در گراف یا منحنی یک تابع؛ بلندترین نقطه به نام نقطه اعظمی (Maximum) و پایین‌ترین نقطه به نام نقطه اصغری (Minimum) یاد می‌شود و همان قیمت‌های x که در آنها تابع قیمت اعظمی و یا اصغری می‌گیرند به نام نقاط بحرانی (Extreme) یاد می‌شوند.

تعریف:

1. **تابع ثابت:** هرگاه مشتق اول یک تابع برای همیشه صفر باشد، تابع را ثابت می‌نامند.
2. **تابع متزايد:** هرگاه مشتق اول یک تابع در یک انتروال (a, b) مثبت باشد، تابع را در آن انتروال متزايد می‌نامند؛ یعنی: $y' > 0$ که در اشکال (1) و (2) نشان داده شده است.
3. **تابع متناقص:** هرگاه مشتق اول یک تابع در یک انتروال (a, b) منفی باشد، تابع را در آن انتروال متناقص می‌نامند؛ یعنی: $y' < 0$ در اشکال زیر نشان داده می‌شود.



(1)



(2)

1. **نقطه اعظمی:** هرگاه یک تابع $y = f(x)$ در یک نقطه معین x_0 از حالت تزايد به حالت تناقص تبدیل گردد و یا به عبارت دیگر، اشاره مشتق در همین نقطه معین x_0 از مثبت به منفی تبدیل گردد، نقطه x_0 را نقطه اعظمی (maximum) می‌نامند.
2. **نقطه اصغری:** هرگاه یک تابع $y = f(x)$ در یک نقطه معین x_0 از حالت تناقص به حالت تزايد تبدیل گردد و یا به عبارت دیگر، اشاره مشتق در همین نقطه معین x_0 از منفی به مثبت تبدیل گردد، نقطه x_0 را نقطه اصغری (minimum) می‌نامند.
3. **نقطه انعطاف:** هرگاه مشتق اشاره خود را در یک نقطه معین x_0 از مثبت به صفر و دوباره به مثبت و یا از منفی به صفر و دوباره به منفی تبدیل نماید نقطه x_0 را به نام نقطه انعطاف یاد می‌نمایند.

مثال 1: تابع $f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x$ داده شده است این تابع دارای چند نقطه بحرانی (Extreme) است؟

حل: مشتق اول تابع را دریافته و $f'(x) = 0$ را قرار داده و سپس قیمت های x را به دست می آوریم.

$$f'(x) = 3x^2 - 7x + 2$$

$f'(x) = 0$

$3x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{17}{54}$	-2	-2	$+\infty$

Max

Min

در نتیجه گفته می توانیم که تابع اصلی درجه سوم بوده و مشتق تابع f تنها در دو نقطه $\left(\frac{1}{3}\right)$ و (2) علامه خود را تغییر می دهد. بناءً دو نقطه بحرانی دارد.

مثال 2: نقاط بحرانی موضعی یا نسبیتی تابع $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$ را مشخص نمایید.

حل: ابتدا مشتق تابع را به دست می آوریم و بعداً علامه آن را تعیین می نمایم.

دیده می شود که تابع شکل $y = \frac{u}{v}$ را دارد؛ پس: $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - (2x - 2)(x + 1)}{(x^2 - 2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 2}{(x^2 - 2x)^2}$$

مشتق تابع وقتی مساوی به صفر است که صورت آن مساوی به صفر باشد.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 12$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{12}}{-2} = -2.73$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{12}}{-2} = 0.73$$

x	-3	-2.73	-1	0.73	1		
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	\searrow	\searrow	\nearrow	\nearrow	\searrow	\searrow	\searrow
			Min	0	Max		
				$-\frac{2}{15}$		-2	

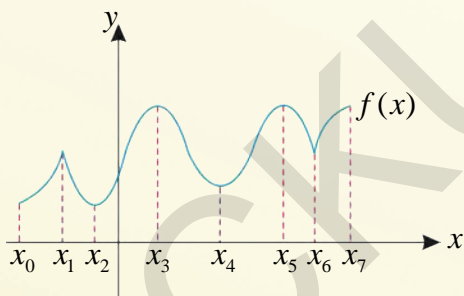
از جدول به مشاهده می‌رسد که f' در هر دو طرف x_1 و x_2 علامه خود را تغییر می‌دهد؛ بنابراین تابع دو نقطه بحرانی (Extreme) دارد؛ یعنی دارای نقاط اعظمی و اصغری است.

نقاط اعظمی و اصغری مطلق:

ممکن است یک تابع در یک انتروال چند نقطه بحرانی داشته باشد، اما در یک انتروال معین تابع یک نقطه اعظمی مطلق و یا یک نقطه اصغری مطلق را داراست که می‌تواند در شکل آن را مشاهده کنید.

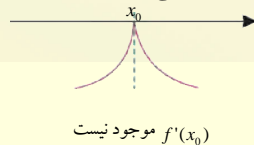
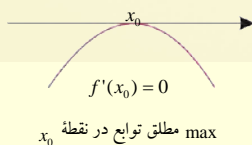
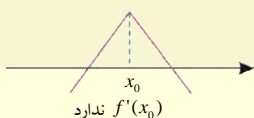


• به شکل زیر دقت کنید:

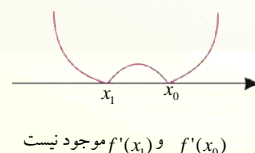
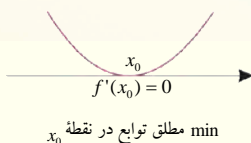
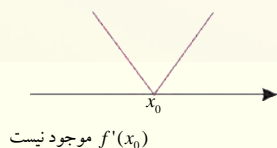


- نقاط اعظمی و اصغری تابع $f(x)$ را نشان دهید؟
 - نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را مشخص سازید؟
 - تابع فوق در انتروال داده شده، چند نقطه بحرانی موضعی دارد؟
 - تابع فوق در انتروال داده شد، چند نقطه اعظمی و اصغری دارد؟
- نتیجه فعالیت بالا را این طور بیان می‌کنیم:

اعظمی مطلق: به صورت عموم، نقطه $(x_0, f(x_0))$ اعظمی مطلق شمرده می‌شود. در صورتی که در ساحة تعریف تابع $f(x)$ برای هر (x) ، $f(x) \leq f(x_0)$ موجود باشد، $f(x_0)$ را اعظمی مطلق می‌گویند.



اصغری مطلق: به صورت عموم، نقطه $(x_0, f(x_0))$ اصغری مطلق نامیده می‌شود. در صورتی که در ساحت تعریف $f(x)$ به هر (x) ، $f(x) \geq f(x_0)$ موجود باشد، $f(x_0)$ را اصغری مطلق می‌گویند. نقاطی که در آنها تابع یا قیمت اعظمی و یا اصغری می‌گیرد به نام نقاط بحرانی یاد می‌کنند.



مثال 1: نقطه اصغری مطلق را در تابع $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ دریافت کنید:
حل: مشتق تابع $f(x)$ را گرفته و حل‌های مشتق تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = x + 3$$

$$f'(x) = 0$$

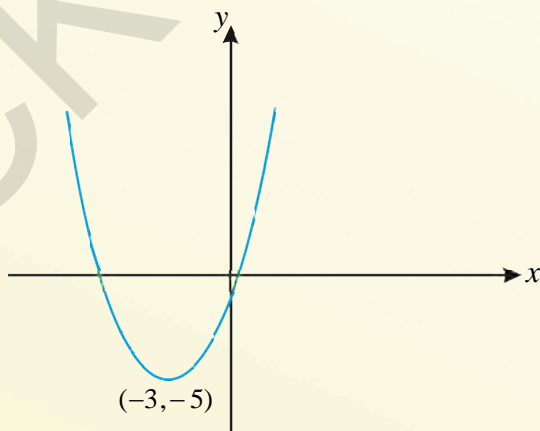
$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

$$f(-3) = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2} \right) = +\infty$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 + 3 \lim_{x \rightarrow \infty} x - \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right) = +\infty$$



x	$-\infty$	-4	-3	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	9	-5	3	15	$+\infty$
		$\frac{2}{2}$	Min		$\frac{2}{2}$	

در نتیجه، در نقطه $x = -3$ قیمت عددی تابع -5 است و در نقطه $(-3, -5)$ تابع اصغری مطلق دارد.

مثال 2: نقاط اعظمی و اصغری تابع $f(x) = x^3 - 3x + 2$ را دریافت نموده و گراف آن را رسم نمایید

حل: جهت دریافت نقاط اعظمی و اصغری تابع ابتدا مشتق اول تابع را دریافت نموده و سپس نقاط صفری مشتق را به دست می آوریم:

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3x^2 = 3$$

$$x^2 = 1$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$$

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

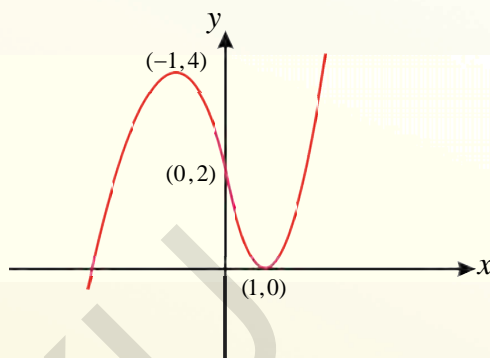
$$f(0) = 0 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 2 = 4$$

$$f(1) = 0, \quad f(0) = 2, \quad f(-1) = 4$$

$$\text{Max } f(-1) = 4$$

$$\text{Min } f(1) = 0$$



x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	5	4	2	0	4	$+\infty$
		\nearrow	\searrow	\searrow	\nearrow	\nearrow	
		6	Max		Min		

در جدول به مشاهده می رسد که تابع در انتروالهای $(-\infty, -1)$ و $(1, +\infty)$ متزايد و در انتروال $(-1, 1)$ متناقص است، بنابراین در نقطه $(1, 0)$ اصغری و در نقطه $(-1, 4)$ اعظمی است.

برای ترسیم گراف باید نکات زیر را در نظر گرفت:

1. مطالعهٔ متمادیت و غیرمتمادیت تابع
2. نقاط تقاطع گراف با محاورات قایم
3. مطالعهٔ اشارهٔ مشتق اول تابع برای تزاید و تناقص تابع
4. دریافت نقاط صفری مشتق اول تابع برای تعیین نقاط اعظمی و اصغری تابع
5. تعیین مجانبها
6. ترتیب جدول و براساس آن، ترسیم نمودن گراف

مثال 3: گراف تابع $y = 2 + x - x^2$ را رسم کنید.

حل: دیده می‌شود که تابع برای همهٔ قیمت‌های متحول معین (تعریف شده) است.

1- نقاط تقاطع این تابع را با محورات x و y دریافت می‌کنیم.

برای دریافت نقاط تقاطع گراف با محور y ، در تابع داده شده x را مساوی به صفر قرار می‌دهیم و

$$\text{قیمت } y \text{ را دریافت می‌کنیم: } x=0 \quad y=2+0-0=2$$

پس گراف فوق، محور y را در نقطهٔ $(0,2)$ قطع می‌کند.

برای دریافت نقاط تقاطع گراف با محور x ، y را مساوی به صفر قرار می‌دهیم و قیمت x را

دریافت می‌کنیم:

$$y=0, \quad 2+x-x^2=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{-2} = -\frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2$$

پس گراف فوق محور x را در نقاط $(-1,0)$ و $(2,0)$ قطع می‌کند.

2- نقاط اعظمی و اصغری تابع را دریافت می‌کنیم و به این منظور، مشتق اول و دوم تابع را مطالعه

می‌نماییم:

$$y = 2 + x - x^2$$

چون در نقاط اعظمی و اصغری مشتق اول تابع صفر است، $y' = 0$ را قرار می‌دهیم:

$$y' = 1 - 2x$$

$$y' = 0, \quad 1 - 2x = 0$$

$$-2x = -1 \Rightarrow 2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

تابع در نقطهٔ $x = \frac{1}{2}$ یک اعظمی یا یک اصغری دارد، برای تشخیص آن مشتق دوم تابع را در

$$\text{نقطهٔ } x = \frac{1}{2} \text{ مطالعه می‌کنیم: } y'' = -2 > 0$$

چون y'' همیشه منفی است، پس در نقطه $x = \frac{1}{2}$ هم منفی می باشد؛ بنابراین تابع در نقطه $x = \frac{1}{2}$ یک نقطه اعظمی دارد. از آنجا که برای $x = \frac{1}{2}$ تابع $y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$ است؛ نقطه اعظمی تابع عبارت می باشد از: $(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4})$

این منحنی نقطه انعطاف ندارد زیرا برای هر x ، $y'' < 0$ است، در حالی که در نقطه انعطاف $y'' = 0$ می باشد.

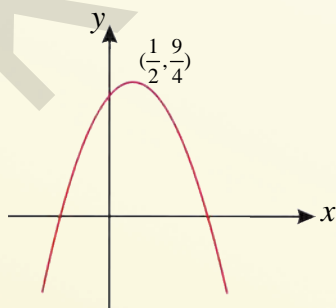
3- مطالعه گراف در $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} (2 + x - x^2) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + x - x^2) = -\infty$$

جهت وضاحت بیشتر جدول زیر را ترتیب نموده و تمام تحولات تابع را در آن نشان می دهیم و بعد گراف آن را ترسیم می نماییم.

x	-1	$\frac{1}{2}$	2	
y'	+	+	0	-
y	\nearrow	\nearrow	\searrow	\searrow



1. extreme موضعی توابع زیر را دریابید؟

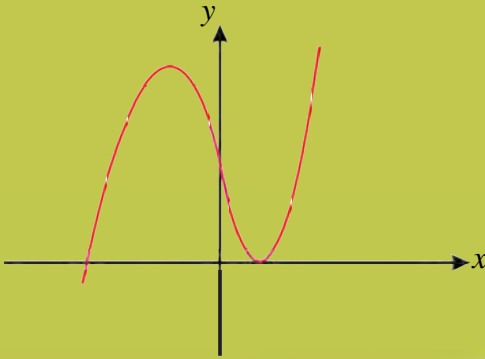
a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$

c) $y = 3x^2 - 4x + 1$

2- min مطلق تابع $f(x) = 3x^3 - 4x^2$ را دریافت کنید؟

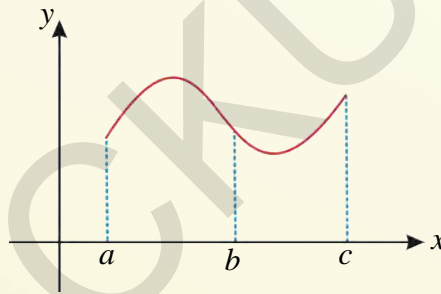
تعیین نقطه انعطاف



نقطه‌یی که گراف یک تابع در آن از محدبیت به مقعریت و برعکس آن تبدیل می‌گردد، به چه نام یاد می‌شود؟ آیا در این نقطه مشتق دوم و علامهٔ تابع را تحقیق کرده می‌توانید؟



شکل زیر را در نظر بگیرید.

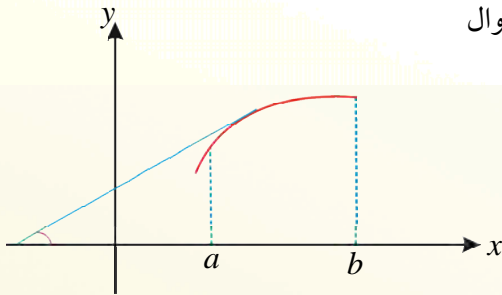


- منحنی تابع $y = f(x)$ در انتروال (a, b) چه نوع منحنی‌یی است؟
- منحنی تابع $y = f(x)$ در انتروال (b, c) چه نوع منحنی‌یی است؟
- در انتروال (a, b) به منحنی یک مماس رسم کنید و آن را با مماسی مقایسه کنید که در انتروال (b, c) با منحنی رسم می‌شود.

نتیجهٔ فعالیت فوق را این طور بیان می‌کنیم:

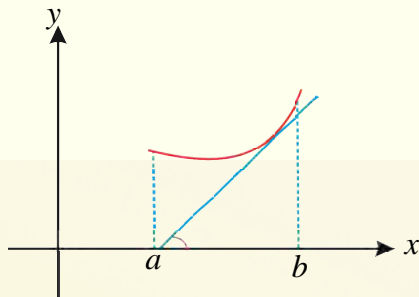
1. منحنی تابع $y = f(x)$ در یک انتروال محدب گفته می‌شود اگر در همین انتروال به منحنی مماس رسم شود و این مماس در قسمت بالایی منحنی واقع باشد که در این صورت، مشتق دوم تابع منفی به دست می‌آید؛ یعنی $y'' < 0$

اگر مشتق دوم تابع $y = f(x)$ در تمام نقاط انتروال منفی باشد، منحنی در همین انتروال محدب می‌باشد.



2. منحنی تابع $y = f(x)$ در یک انتروال مقعر گفته

می‌شود در صورتی که در این انتروال به منحنی مماس رسم شود و منحنی در بالای مماس واقع گردد. همچنان اگر مشتق دوم تابع $y = f(x)$ در تمام نقاط انتروال مثبت $y'' > 0$ باشد، منحنی در این انتروال مقعر می‌باشد.



تعریف: نقطه‌یی که در آن منحنی جهت خود را تغییر می‌دهد؛ یعنی از مقعریت به محدبیت و یا برعکس آن جهت خود را تبدیل و به مشتق اول آن موجود و مشتق دوم آن صفر شود نقطه انعطاف (Inflection) نامیده می‌شود.

اگر در تابع $y = f(x)$ برای $x = x_0$ مشتق دوم تابع صفر شود ($f''(x) = 0$) تابع یک نقطه انعطاف دارد و یا برعکس نقطه انعطاف ندارد.

مثال 1: گراف تابع $f(x) = x^2 - 5x + 4$ را رسم و در آن مقعریت و محدبیت را تحقیق نمایید.

حل: تابع برای تمام قیمت‌های متحول معین است.

1- تقاطع با محور y :

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ y=4 \end{array} \right\} \Rightarrow (0, 4)$$

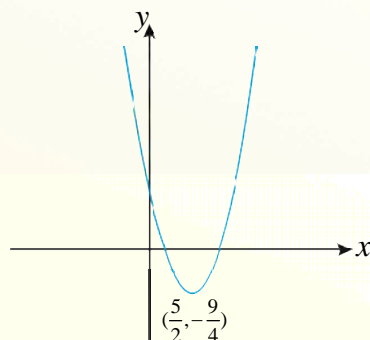
2- تقاطع با محور x :

$$\left. \begin{array}{l} y=0 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1) \Rightarrow x_1 = 4, \quad x_2 = 1$$

نقاط تقاطع با محور x ، $(4,0)$ و $(1,0)$ است.

x	$-\infty$		0	1	$\frac{5}{2}$	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-	-	0	+	+
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	4	\searrow	0	\nearrow	$+\infty$

$\frac{5}{2}$
min
4



برای تحقیق مقعریت و محدبیت گراف مشتق دوم تابع را به دست می آوریم:

$$f(x) = x^2 - 5x + 4 \Rightarrow y' = 2x - 5$$

$$f''(x) = 2 > 0$$

چون $y'' > 0$ است، در نتیجه گفته می توانیم که منحنی مقعر است.

مثال 2: انتروال های را تعیین کنید که در آن گراف تابع $y = x^3 + 9x^2 - 6x + 1$ محدب یا مقعر

باشد.

حل:

$$y = x^3 + 9x^2 - 6x + 1$$

$$y' = 3x^2 + 18x - 6 \Rightarrow y'' = 6x + 18$$

$$y'' < 0 \Rightarrow 6x + 18 < 0$$

$$6x < -18 \Rightarrow x < -3$$

$$y'' > 0 \Rightarrow 6x + 18 > 0$$

$$6x \geq -18$$

$$x \geq -3$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
y''	-	0	+
y	\cap		\cup

مقعر انعطاف محدب

همان طور که دیده می شود، مشتق دوم در $(-\infty, -3)$ منفی و در $(-3, +\infty)$ مثبت است، بنابراین

گراف در انتروال اول محدب و در انتروال دوم مقعر است.

مثال 3: نقطه انعطاف تابع $f(x) = x^5 - 5x^3$ را تعیین کنید؟

حل:

$$f(x) = x^5 - 5x^3 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 15x^2$$

$$f''(x) = 20x^3 - 30x$$

$$f''(x) = 0$$

$$20x^3 - 30x = 0$$

$$x(20x^2 - 30) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$20x^2 - 30 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{30}{20}$$

$$x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	\cap	-13.65	\cup	\cap	$-\infty$

دیده می شود که در نقاط $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ، $x = 0$ و $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ مشتق دوم صفر است، یعنی $f''(x) = 0$ علامه خود را تغییر می دهد و در این نقاط مماس رسم شده می تواند، که آن نقاط عبارت از نقاط انعطاف اند.

تمرین

1- محدبیت و مقعریت تابع $f(x) = x^2 - 4$ را تعیین کنید؟

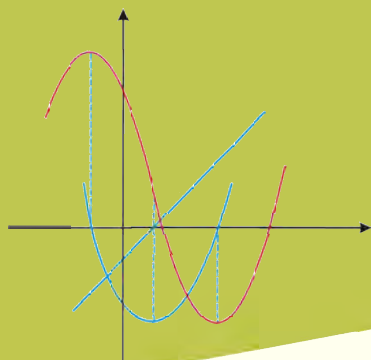
2- نقطه انعطاف تابع $f(x) = -2x^2 - 1$ را تعیین کنید.

ترسیم منحنی‌ها

گراف توابع درجه دوم

گراف تابع شکل مقابل چه نوع تابعی را نشان

می‌دهد؟



- گراف‌های توابع $y = -x + 1$ و $y = x + 1$ را رسم نموده و با هم مقایسه کنید؟
- ساحت تعریف تابع $y = ax^2 + bx + c$ را تعیین کنید. آیا این تابع متمادی است؟
- مشتق اول تابع مذکور را دریابید و نقاط اعظمی، اصغری و محور تناظر را مشخص کنید.
- لیمیت تابع را طوری پیدا کنید که $x \rightarrow \pm\infty$ تقریب کند.
- نقاط تقاطع با محورها را تعیین کنید.
- جدول تحولات را ترتیب و منحنی مذکور را رسم کنید.

نتایج فعالیت بالا را این طور بیان می‌کنیم:

1- ساحت تعریف تابع: دیده می‌شود که تابع برای تمام قیمت‌های متحول معین است؛ یعنی تابع در

انتروال $D_f \rightarrow (-\infty, +\infty)$ دارای قیمت‌های معین می‌باشد، لذا تابع در ناحیه تعریف متمادی است.

2- تعیین نقاط بحرانی و محور تناظر: برای دریافت نقاط بحرانی نقاط صفری مشتق را دریافت

می‌نماییم:

$$f'(x) = 2ax + b = 0$$

$$f'(x) = 0$$

$$2ax + b = 0$$

$$2ax = -b$$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

قیمت $x = \frac{-b}{2a}$ را در اصل تابع قرار می‌دهیم:

$$y = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \Rightarrow a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

$$y = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ نقطهٔ بحرانی، اعظمی یا اصغری است.

الف: اگر $a > 0$ باشد؛ پس: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $a > 0 \Rightarrow$

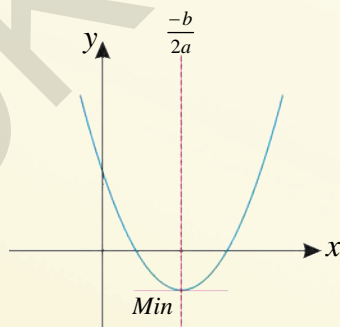
تابع در نقطهٔ $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ Min دارد.

ب: اگر $a < 0$ باشد؛ پس: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $a < 0 \Rightarrow$

تابع در نقطهٔ $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ Max دارد.

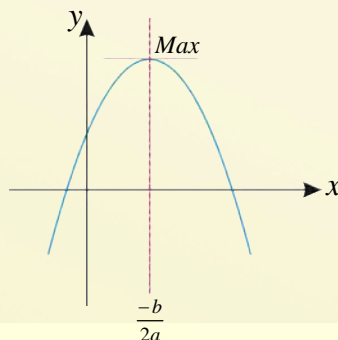
3- برای ترسیم گراف تابع، جدول مربوطه را ترتیب و گراف آن را رسم می‌نماییم:

$a > 0$			
x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
y'		-	+
y	$+\infty$	$\searrow \frac{4ac - b^2}{4a}$	$\nearrow +\infty$



چون $a > 0$ است دهن منحنی به طرف بالا و $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4}\right)$ نقطهٔ اصغری است.

$a < 0$			
x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
y'		-	+
y	$-\infty$	$\nearrow \frac{4ac - b^2}{4a}$	$\searrow -\infty$



چون $a < 0$ است دهن منحنی به طرف پایین و $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4}\right)$ نقطهٔ اعظمی است.

مثال 1: تحولات تابع $f(x) = x^2 - 4x + 3$ را مطالعه و گراف آن را رسم کنید.

1- تابع برای همهٔ قیمت‌های اعداد حقیقی متحول معین می‌باشد، یعنی ساحت تعریف

تابع $(-\infty, +\infty)$ است؛ پس تابع در همین انتروال متمادی می‌باشد.

2- نقاط تقاطع منحنی تابع با محور x :

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \\ (x-1)(x-3) = 0 \\ x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x-3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{array} \right\} (1, 0), (3, 0)$$

3- نقاط تقاطع منحنی تابع با محور y :

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 - 4 \cdot 0 + 3 \\ y = 3 \end{array} \right\} (0, 3)$$

4- برای دریافت نقاط Extreme تابع، نقاط صفری مشتق اول تابع را دریافته و جدول آن را

ترتیب می‌نماییم.

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

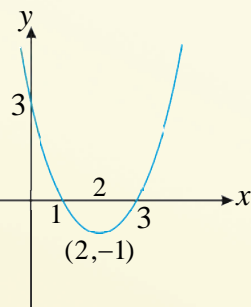
$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 \Rightarrow V(2, -1) \min$$

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [x^2 - 4x + 3] = +\infty$$

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
y	$-\infty \searrow$	$3 \searrow$	$0 \searrow$	$-1 \nearrow$	$0 \nearrow$	$+\infty \nearrow$

Min



مثال 2: تحولات تابع $f(x) = -x^2 + 2x$ را مطالعه و گراف آن را رسم کنید.

حل: دیده می‌شود که تابع برای تمام قیمت‌های متحول معین است؛ پس:

1- تعیین ساحت تعریف تابع عبارت از $(-\infty, +\infty)$ می‌باشد و در حقیقت، تابع در این ساحت

متمادی است.

2- نقاط تقاطع منحنی تابع با محور x :

$$f(x) = 0$$

$$-x^2 + 2x = 0$$

$$x(-x + 2) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad (0, 0)$$

$$-x + 2 = 0$$

$$x_2 = 2 \quad (2, 0)$$

نقاط تقاطع

3- نقاط تقاطع منحنی تابع با محور y :

$$x = 0$$

$$f(x) = -x^2 + 2x$$

$$f(x) = 0 + 2 \cdot 0$$

$$f(x) = 0 \quad (0, 0)$$

4- برای دریافتن نقاط Extreme تابع، نقاط صفری مشتق اول تابع را دریافته و جدول آنرا ترتیب و گراف آن را رسم می‌نماییم.

$$D_f \rightarrow (-\infty, +\infty)$$

$$f(x) = -x^2 + 2x$$

$$f'(x) = -2x + 2 = 0$$

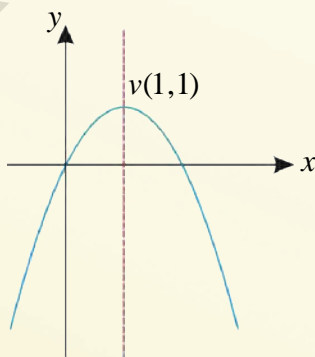
$$-2x + 2 = 0$$

$$-2x = -2$$

$$x = 1$$

$$f(1) = 1$$

$$\Rightarrow V(1, 1) \text{Max}$$



x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	-	-	-
$f(x)$	$-\infty$	0	1	0	$-\infty$

Max

در جدول به مشاهده می‌رسد که علامه مشتق از مثبت به منفی تغییر نموده و گراف تابع را از حالت نزاید به تناقص تغییر شکل می‌دهد؛ بنابراین تابع در نقطه $(1, 1)$ اعظمی است.

تمرین



1- گراف تابع $f(x) = 2x^2 - x - 1$ را رسم کنید.

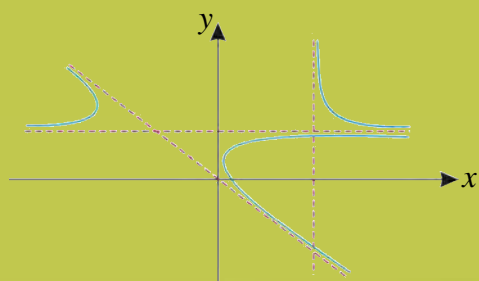
2- تحولات تابع $f(x) = x^2 - x - 2$ را مطالعه و گراف آن را رسم کنید.

مجانب‌های گراف یک تابع

به شکل مقابل توجه نموده و بگویید خطوط نقطه

نقطه به چه نام یاد می‌گردند، هر کدام را نام

ببرید؟



فعالیت

• مجانب‌ها چه نوع خطوطی اند؟

• مجانب‌ها، منحنی‌ها را در کجا قطع می‌کنند؟

نتیجه فعالیت فوق را چنین بیان می‌نماییم:

مجانب‌ها: مجانب‌ها عبارت از خطوطی مستقیم اند که حیثیت رهنمای منحنی را دارند و در توابعی که برای بعضی از قیمت‌های متحول غیر متمادی اند، وجود دارند.

مجانب‌ها به سه نوع اند:

1- مجانب عمودی: در تابع $y = f(x)$ وقتی مجانب عمودی به

وجود می‌آید که اگر $x \rightarrow a$ کند، $y \rightarrow \infty$ می‌کند؛ یعنی

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ می‌گردد و یا به عبارت دیگر، در توابع کسری

هرگاه مخرج کسر مساوی به صفر گردد، تابع مذکور به طرف

بی‌نهایت تقرب می‌نماید. بنابراین جهت دریافت این نوع مجانب،

مخرج کسر را مساوی به صفر قرار می‌دهیم.

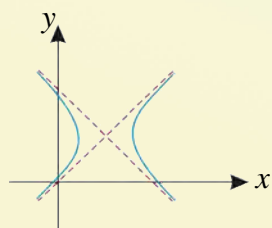
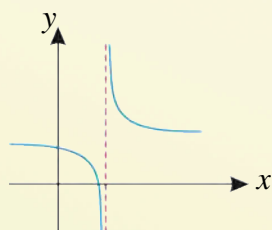
2- مجانب مایل: در تابع کسری $y = f(x)$ زمانی که حاصل

تقسیم صورت بر مخرج کسر یک تابع خطی ($y = ax + b$) باشد

طوری که $a \neq 0$ به دست آید و این وقتی امکان پذیر است که تابع

دارای مجانب مایل باشد، یعنی درجه متحول صورت از درجه

متحول مخرج به اندازه یک بزرگ‌تر باشد.



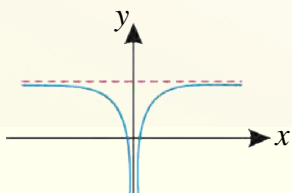
به خاطر داشته باشید که اگر یک تابع دارای مجانب افقی باشد مجانب مایل ندارد و برعکس هرگاه مجانب مایل داشته باشد، مجانب افقی ندارد.

3- مجانب افقی: یک تابع زمانی دارای مجانب افقی است که اگر

$x \rightarrow \infty$ کند قیمت تابع مذکور یک مقدار ثابت گردد و یا به

عبارت دیگر زمانی یک تابع دارای مجانب افقی است که $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = c$ گردد. بنابراین برای دریافت این نوع

مجانب لیمیت تابع مذکور را دریافت می‌نماییم زمانی که $x \rightarrow \infty$ نماید.



مثال 1: مجانب عمودی تابع $f(x) = \frac{x+1}{2x-4}$ را دریابید.

حل: برای دریافتن مجانب عمودی مخرج تابع را مساوی به صفر قرار می‌دهیم به این ترتیب که:

$$2x - 4 = 0$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

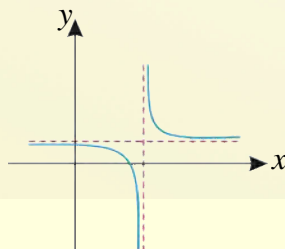
$x = 2$ عبارت از مجانب عمود تابع است.

مجانب افقی: برای دریافت مجانب افقی لیمیت تابع را دریافت می‌نماییم طوری که $x \rightarrow \pm\infty$ کند.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x+1}{2x-4} \right) = \frac{1}{2}$$

$y = \frac{1}{2}$ عبارت از مجانب افقی است.

x	-1	0	+1
y	0	$-\frac{1}{4}$	-1



مثال 2: مجانب‌های تابع $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$ را دریابید.

حل:

1- مجانب مایل: برای دریافت مجانب مایل، صورت تابع را بر مخرج تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x} = x + 2 - \frac{1}{x} \Rightarrow y = x + 2$$

2- مجانب عمودی: برای دریافت مجانب عمودی مخرج تابع را مساوی به صفر قرار می‌دهیم:

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x} \Rightarrow x = 0$$

3- مجانب افقی: چون تابع مجانب مایل دارد مجانب افقی نمی‌تواند داشته باشد.

مثال 3: مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ را دریابید.

حل:

1. مجانب عمودی: مخرج تابع را مساوی به صفر قرار می‌دهیم:

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x+1=0 \\ x_1 = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x-2=0 \\ x_2 = 2 \end{array}$$

پس $x = -1$ و $x = 2$ مجانب‌های عمودی تابع اند.

2- مجانب افقی: برای دریافت مجانب افقی، لیمیت تابع را به دست می‌آوریم:

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)} = 1$$

پس $y = 1$ مجانب افقی است.

3- چون از حاصل تقسیم صورت بر مخرج تابع $y = ax + b$ حاصل نشد، دارای مجانب مایل نمی‌باشد.

روش عمومی تعیین مجانب‌ها:

هرگاه m و n به ترتیب درجه صورت و مخرج تابع ناطق $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ باشند؛ پس:

الف: اگر $m < n$ باشد؛ محور x مجانب افقی است.

ب: اگر $m = n$ باشد $y = b$ مجانب افقی است طوری که b نسبت ضرایب حدود درجه‌های m و n می‌باشد.

ج: برای $m > n$ مجانب افقی وجود نداشته و احتمال موجودیت مجانب مایل وجود دارد.

د: در صورتی که $m = n + 1$ باشد، یعنی اگر درجه صورت یک واحد از درجه مخرج بیشتر باشد تابع حتماً مجانب مایل دارد. در چنین حالتی، مجانب افقی موجود نیست.

تمرین

مجانب‌های توابع زیر را تعیین نمایید.

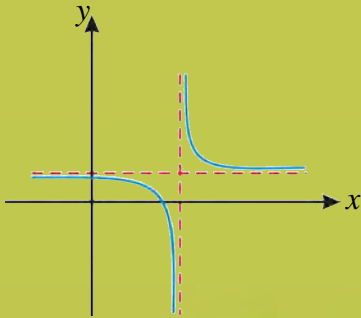
$$1) f(x) = \frac{3x-6}{x^2-x-2}$$

$$2) f(x) = \frac{-2x^2}{x^2+1}$$

$$3) f(x) = \frac{8}{x^2-4}$$

گراف توابع هوموگرافیک

به شکل توجه کنید، این شکل گراف چه نوع تابعی را نشان می‌دهد؟ مجانب‌های افقی و عمودی آن را نشان دهید.



فعالیت

- تابع هوموگرافیک چه نوع تابعی است؟ با یک مثال واضح سازید.
 - گراف تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را رسم کنید.
 - مجانب‌های تابع مذکور را دریافت و رسم کنید.
 - تقاطع منحنی تابع فوق را با محورهای x و y پیدا کنید.
- فعالیت فوق را این طور بیان می‌کنیم:

توابعی که شکل $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ را داشته باشند، به نام توابع هوموگرافیک یاد می‌شوند طوری که $c \neq 0$ باشد. این نوع توابع دو مجانب دارند که:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax}{cx} + \frac{b}{d}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{d}}{c + \frac{d}{x}} \Rightarrow y = \frac{a}{c} \quad \text{1- مجانب افقی:}$$

$$cx + d = 0 \Rightarrow cx = -d \Rightarrow x = -\frac{d}{c} \quad \text{2- مجانب عمودی (قایم):}$$

مثال 1: تحولات تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ را مطالعه و گراف آن را رسم کنید.

حل:

$$x-3=0$$

$$x=3$$

1- چون مخرج برای $x=3$ صفر می شود، تابع به استثنای $x=3$ دیگر به تمام قیمت های متحول معین

است؛ یعنی ساحت تعریف تابع: $Do\ min = IR \setminus \{3\}$

2- تقاطع منحنی تابع با محور x :

$$\left. \begin{array}{l} f(x)=0 \\ 2x-1=0 \\ 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{array} \right\} \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

3- تقاطع منحنی تابع با محور y :

$$x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{2 \cdot 0-1}{0-3}=\frac{1}{3} \quad \left\} \left(0, \frac{1}{3}\right)\right.$$

4- تعیین مجانب ها:

الف- مجانب افقی: $y=2$, $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2x-1}{x-3}=2$ یا $f(x)=\frac{a}{c}=\frac{2}{1}=2$

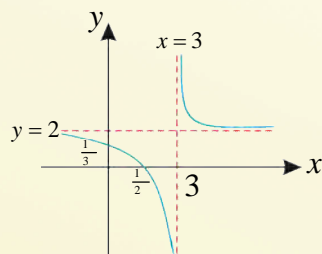
ب- مجانب عمودی: $x=3$ $\Rightarrow x-3=0$ یا $x=-\frac{d}{c}=-\frac{-3}{1}=3$

5- نقاط Extreme تابع را دریافته، جدول آن را ترتیب و گراف آن را رسم می نماییم.

$$f'(x)=\frac{2(x-3)-(2x-1)}{(x-3)^2}=\frac{-5}{(x-3)^2}<0$$

$$f''(x)=\frac{0 \cdot (x-3)^2-(-5) \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10}{(x-3)^3}$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f''(x)$	-		+
$f(x)$	2 $\nearrow -\infty$	تعریف نشده	$+\infty \searrow 2$



مثال 2: تحولات تابع $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ را مطالعه و گراف آن را رسم کنید.

حل: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

1- ساحت تعریف تابع $D_f \rightarrow IR \setminus \{-1\}$ است؛ یعنی تابع در نقطه $x=-1$ تعریف نگردیده است.

2- تقاطع منحنی تابع با محور x : $y=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$

3- تقاطع منحنی تابع با محور y : $x=0 \Rightarrow y=\frac{0-1}{0+1}=-1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0,-1)$

4- تعیین مجانب‌ها:

الف- مجانب عمودی: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

ب- مجانب افقی: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f(x) = y=1$

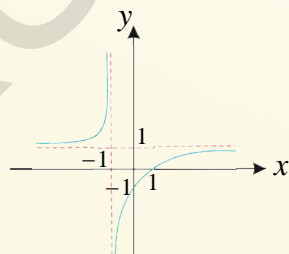
5- نقاط Extreme تابع را دریافته، جدول آن را ترتیب و گراف آن را رسم می‌نماییم.

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - 1 \cdot (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$$

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (x+1)^2 - 2 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-4(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-4}{(x+1)^3}$$

x	$-\infty$	-1
$f'(x)$	+	+
$f''(x)$	+	-
$f(x)$	$\cup 1 \nearrow \infty$	$\searrow -\infty \nwarrow 1$



مثال 3: می‌خواهیم گراف تابع $f(x) = \frac{2x-5}{x}$ رسم کنیم.

حل:

1- ساحت تعریف را مطالعه می‌نماییم، دیده می‌شود که تابع به استثنای $x=0$ دیگر به تمام قیمت-

های متحول معین است؛ یعنی $D_f \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2- تقاطع با محاورات

الف- تقاطع با محور x :

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x-5}{x} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x-5=0 \\ 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow (2.5, 0)$$

ب- تقاطع با محور y : برای $x=0$ تابع $f(x)$ تعریف نشده است؛ بنابراین محور y نقطه تقاطع ندارد.

a. مجانب‌ها:

الف- مجانب عمودی: چون در مخرج تابع تنها x موجود است؛ $x=0$ مجانب عمودی می‌باشد در این صورت محور y مجانب عمودی تابع شده می‌تواند.

ب- مجانب افقی: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{2x-5}{x} \right] = 2$ است؛ پس $y=2$ مجانب افقی تابع می‌باشد.

b. دریافت نقاط بحرانی: برای دریافت نقاط بحرانی مشتق اول تابع را دریافت می‌نماییم:

$$f(x) = \frac{2x-5}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot x - (2x-5)}{x^2} = \frac{2x-2x+5}{x^2}$$

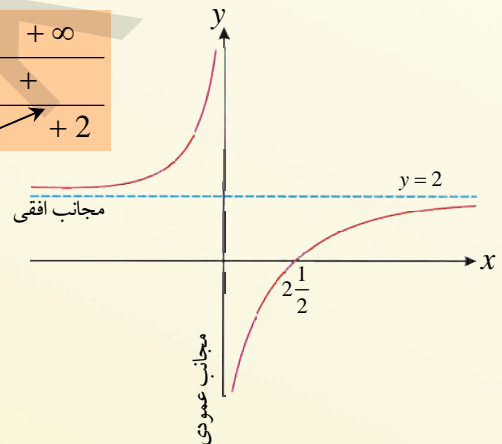
$$f'(x) = \frac{5}{x^2} > 0$$

چون $f'(x) > 0$ است بنابراین تابع متزايد می‌باشد.

برای ترسیم درست گراف، جدول تحولات تابع را طور زیر ترتیب می‌نماییم:

x	$-\infty$		0	2.5	$+\infty$
$f'(x)$		+		+	+
$f(x)$	2	\nearrow	$+\infty$	$-\infty$	\nearrow

تعریف نشده

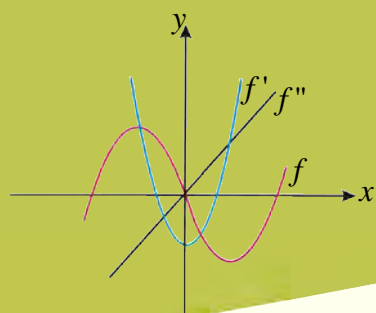


تمرین

1- تحولات تابع $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ را تحقیق و ترسیم کنید؟

2- تحولات تابع $f(x) = \frac{x}{x-4}$ را تحقیق و ترسیم نمایید؟

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0$$



گراف تابع یک مجهولۀ درجه سوم

شکل مقابل، گراف بعضی از توابع را نشان می‌دهد، در مورد گراف هر تابع نظر خود را بیان نمایید.



- راجع به تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ فکر کرده و بگویید که تابع درجه چند است.
- ضرایب و حد ثابت تابع مذکور را بنویسید.
- مشتق دوم تابع فوق را به دست آرید.

فعالیت بالا را این طور بیان می‌کنیم:

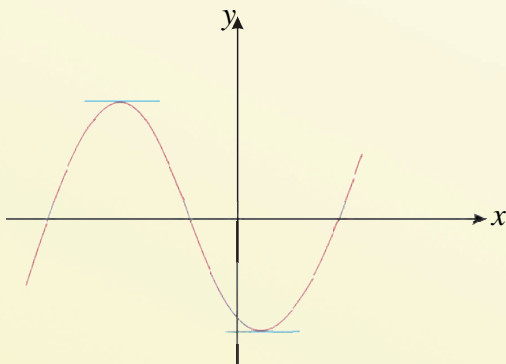
1- تابع درجه سوم $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ را طوری در نظر می‌گیریم که $a > 0$ باشد. هرگاه مشتق اول این تابع را دریافت نماییم، یک تابع درجه دوم به دست می‌آید اگر در این تابع $(\Delta f' > 0)$ باشد مشتق اول تابع دارای دو راه حل است. اکنون اگر $a > 0$ باشد، منحنی از چپ به راست اول یک اعظمی نسبی و بعد یک اصغری نسبی دارد.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$a > 0 \Rightarrow \Delta f' > 0$$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$				$+\infty$



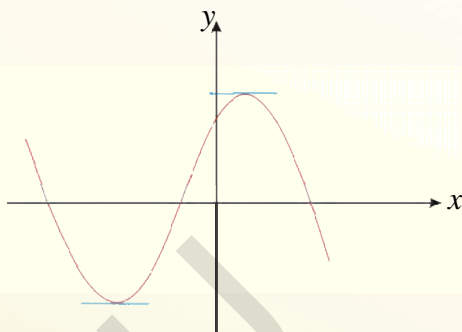
2- اگر در تابع $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، $a < 0$ و $\Delta f' > 0$ باشد، پس $f'(x) = 0$ و معادله دارای دو راه حل است و برای $\Delta f' > 0$ منحنی از طرف چپ به طرف راست یک اصفری نسبی و یک اعظمی نسبی دارد.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$a < 0 \Rightarrow \Delta f' > 0$$

x		x_1		x_2	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$				$-\infty$



3- اگر منحنی تابع درجه سوم نقطه بحرانی نسبی داشته باشد، مختصات نقطه انعطاف آن عبارت

$$\text{است از: } I(x_c, y_c) = \left(\frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}, \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} \right)$$



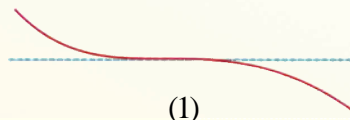
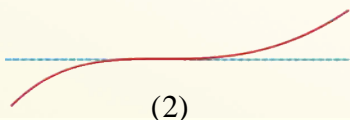
4- نقاط تناظر تابع درجه سوم نقاط انعطاف تابع می باشد:

$$f'(x) = 0$$

$$3ax^2 + 2bx + c = 0$$

که مرکز تناظر آن، بعد از تکمیل مربع معادله فوق، از حل آن به دست می آید که $x = -\frac{b}{3a}$ است.

5- در تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ اگر $a < 0$ و $\Delta f' = 0$ باشد و $f'(x) = 0$ وضع شود، معادله یک یا دو راه حل مساوی دارد که در این حالت اگر $f'(x) < 0$ باشد، گفته می‌توانیم که تابع متناقص است؛ مانند شکل (1)، اما اگر $f'(x) > 0$ باشد، تابع متزاید است؛ مانند شکل (2).



مثال 1: تحولات تابع $f(x) = (x-1)(x+2)^2$ را تحقیق و گراف آن را رسم کنید.

حل: ابتدا مشتق اول تابع را به دست آورده، آن را مساوی به صفر قرار می‌دهیم و مختصات extreme تابع را تعیین می‌نماییم. بعداً به کمک مشتق اول مشاهده می‌نماییم که تابع در کدام قسمت متزاید و در کدام قسمت متناقص است. همچنین نقاط تقاطع با محاورات را دریافت می‌داریم و برای تشخیص نقاط اعظمی، اصغری و نقاط انعطاف از مشتق دوم تابع استفاده نموده جدول تحولات را ترتیب و گراف آن را رسم می‌نماییم:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$3x^2 + 6x = 0$$

$$x(3x + 6) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad 3x + 6 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -2$$

$$f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 = -4$$

$$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4$$

$$= -8 + 12 - 4 = 0$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0$$

$$6x = -6$$

$$x = -1$$

برای به دست آوردن نقطه انعطاف در تابع اصلی $x = -1$ را وضع نموده و قیمت $f(x)$ را به

$$f(-1) = (-1-1)(-1+2)^2 = -2$$

دست می‌آوریم:

نقطه انعطاف: $I(-1, -2)$

تقاطع با محاورات:

الف- تقاطع با محور x :

$$y = 0$$

$$(x-1)(x+2)^2 = 0$$

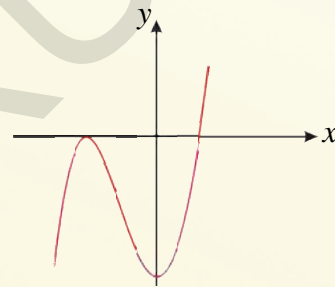
$$\left. \begin{array}{l} x-1=0 \\ x=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (x+2)^2=0 \\ x+2=0 \\ x_2=-2 \end{array} \right\} \Rightarrow (1,0), (-2,0)$$

ب- تقاطع با محور y :

$$x = 0$$

$$y = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 = -4 \Rightarrow (0, -4)$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	-	+	
$f''(x)$	-	-	+	+	
$f(x)$	$-\infty$	0	-2	-4	$+\infty$
		max		min	



مثال 2: تحولات تابع $f(x) = -x^3 + 3x^2$ را تحقیق و گراف آن را رسم کنید.

حل: ابتدا مشتق اول تابع را دریافت نموده و سپس نقاط صفری، اعظمی و اصغری تابع را به دست

می آوریم:

-1

$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-3x + 6) = 0$$

$$x_1 = 0, -3x + 6 = 0 \Rightarrow -3x = -6 \Rightarrow x_2 = 2$$

نقاط اعظمی و اصغری عبارت است از:

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0 \\ f(2) = -2^3 + 3 \cdot 2^2 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow (0,0), (2,4)$$

2- تقاطع با محورات:

الف- تقاطع با محور x :

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ -x^3 + 3x^2 = 0 \\ x^2(-x+3) = 0 \\ x_1 = 0, \quad -x+3 = 0 \\ x_2 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow (0,0), (3,0)$$

ب- تقاطع با محور y :

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = -0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (0,0)$$

3- برای دریافت نقطه انعطاف $f''(x)$ را مطالعه می نماییم:

$$f''(x) = -6x + 6 = 0$$

$$x = 1$$

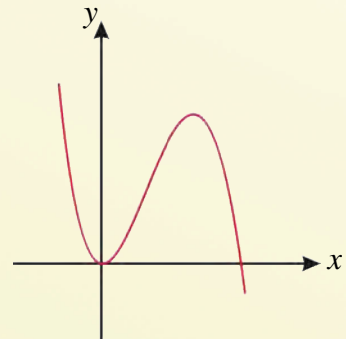
$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow I(1, 2)$$

4- حال جدول را ترتیب و گراف آن را رسم می نماییم:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+	-
$f''(x)$	+	+	0	-	-
$f(x)$	$+\infty$ U	0 U	2 U	4 U	$-\infty$ U

نسبی Min نسبی Max



مثال 3: مختصات مرکز تناظر تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ را دریابید.

حل: می‌دانیم که مرکز تناظر از رابطه $x = \frac{-b}{3a}$ به دست می‌آید؛ پس:

$$x = \frac{-b}{3a} = \frac{-(-3)}{3 \cdot 1} = 1 \Rightarrow f(1) = 1^3 - 3(1)^2 + 1 + 1 = 0$$

مختصات مرکز تناظر $C(1, 0)$

تمرین

جدول تحولات توابع زیر را ترتیب و گراف آن را رسم کنید؟

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$

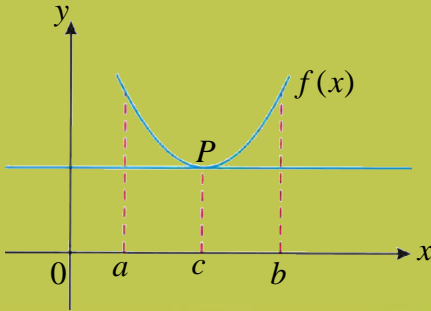
b) $f(x) = -(x-1)^3 - 1$

2- مختصات مرکز تناظر تابع $f(x) = -2x^2 + 6x - 3$ را پیدا کنید.

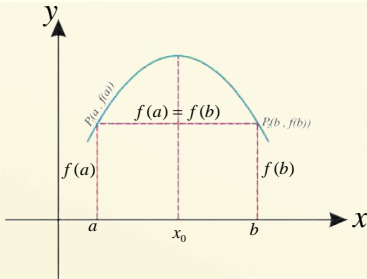
قضیه رول

Rolle Theorem

در شکل مقابل، تابع $f(x)$ با خط مستقیم Δ چه رابطه‌یی دارد و $f'(c)$ مساوی با چی است؟



فعالیت



در شکل مقابل، در انتروال (a, b) بالای منحنی $f(x)$ نقطه‌یی موجود است که از آن می‌توان به منحنی مماسی موازی با محور x رسم نمود.

• تابع $f(x)$ در کدام انتروال متمادی و مشتق‌پذیر است؟

• اگر $f(a) = f(b)$ باشد، نقطه x_0 را در انتروال (a, b) مطالعه کنید.

از فعالیت بالا این قضیه به دست می‌آید:

قضیه

اگر تابع $f(x)$ در انتروال $a \leq x \leq b$ متمادی و در انتروال $a < x < b$ مشتق‌پذیر باشد؛ هرگاه $f(a) = f(b)$ شود، بنابراین کم از کم یک نقطه x_0 در انتروال $a < x < b$ موجود است که در آن $f'(x_0) = 0$ می‌شود.

ثبوت:

چون تابع $f(x)$ در انتروال داده شده متمادی و مشتق‌پذیر است، دارای نقاط بحرانی نیز می‌باشد است.

1- اگر تابع $f(x) = c$ باشد، واضح است که $f'(x) = 0$ است.

2- اگر تابع $f(x)$ ثابت نباشد و $x_1, x_2 \in (a, b)$ و $f(x_1) > 0$ باشد؛ تابع در $[a, b]$ یک $x_0 \in [a, b]$ قیمت اعظمی (Maximum) دارد، که $f(x_0) \geq f(x_1) > 0$ است. به همین ترتیب اگر

$f(x_2) < 0$ باشد، در تابع یک قیمت اصغری (Minimum) دارد.

از آنجا که در نقاط بحرانی (Extreme) مشتق اول تابع صفر است؛ $f'(x_0) = 0$ می شود.

مثال 1: قضیه رول را برای تابع $f(x) = \cos x$ در انتروال $[a, b] = (\pi, 5\pi)$ تطبیق کنید.

حل: $f(\pi) = (5\pi) = -1$ است؛ بنابراین تابع $f(x)$ برای هر قیمت x مشتق پذیر است، در

$(\pi, 5\pi)$ متصل و در انتروال $(\pi, 5\pi)$ دارای مشتق می باشد و مطابق به قضیه Rolle در انتروال

$(\pi, 5\pi)$ کم از کم یک x_0 موجود است تا $(\cos x)' = 0$ شود، چنان که $(\cos x)' = -\sin x$

می باشد. پس باید کم از کم یک حل معادله $-\sin x = 0$ در $(\pi, 5\pi)$ موجود باشد.

$\sin x = 0 \Rightarrow -\sin x = 0$ این معادله در $(\pi, 5\pi)$ دارای سه حل $4\pi, 3\pi, 2\pi$ می باشد.

مثال 2: قضیه رول را در تابع $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ در انتروال $[a, b] = [-1, 1]$ تطبیق کنید.

حل: دیده می شود که تابع در نقاط آغاز و انجام مشتق پذیر نیست، ولی قضیه رول در آن قابل

تطبیق است؛ زیرا $f(-1) = f(1) = 0$ و $f(0)$ در انتروال $[-1, 1]$ متصل است و در $[-1, 1]$ یک

عدد x_0 موجود می باشد تا $f'(x_0) = 0$ شود و آن عبارت از $x_0 = 0$ است.

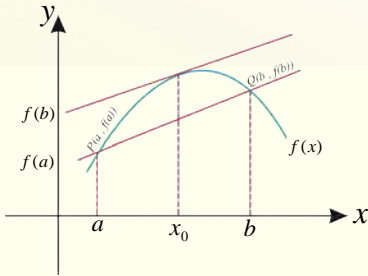
مشتق را با استفاده از فورمول $y'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u}}$ دریافت می نمایم:

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(0) = \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0$$

قضیه قیمت متوسط (قضیه لاگرانژ):



شکل مقابل را در نظر بگیرید.



- میل یک خط مستقیم از کدام رابطه به دست می آید؟
- میل خط مستقیم \overline{PQ} را دریافت کنید.
- میل \overline{PQ} با مشتق تابع $f(x)$ چه رابطه‌ای دارد؟

از فعالیت فوق قضیه زیر را بیان می‌کنیم:

قضیه: اگر $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ متمادی و مشتق‌پذیر باشد، در همین انتروال (a, b) یک عدد C موجود است طوری که $f(b) - f(a) = f'(C)(b - a)$ می‌شود؛ یعنی:

$$f'(C) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ثبوت: یک تابع کمکی را در نظر می‌گیریم:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x$$

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a = \frac{f(a)b - f(b)a}{b - a} \quad \text{..... I}$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot b = \frac{f(a)b - f(b)a}{b - a} \quad \text{..... II}$$

نظر به مساوی شدن طرف راست رابطه I و II چنین نتیجه می‌گیریم که بر اساس قضیه رول $c \in (a, b)$ موجود است؛ طوری که $g'(c) = 0$:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow g'(x) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

مثال: در تابع $f(x) = 2x^3 - 8x + 1$ قضیه قیمت متوسط را در $[a, b] = [1, 3]$ بررسی نمایید.

حل: دیده می شود که تابع $f(x)$ در $[1, 3]$ متمادی و در $(1, 3)$ مشتق پذیر است؛ بنابراین مطابق قضیه قیمت متوسط در $(1, 3)$ ، x_0 موجود است.

$$f(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{36}{2} = 18$$

$$f'(x_0) = 6x^2 - 8 = 18 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{26}{6}}$$

برای دریافت C داریم:

$$\text{از آنجا که } x = \sqrt{\frac{26}{6}} \text{ در انتروال } (1, 3) \text{ اشتراک دارد، } x_0 = \sqrt{\frac{13}{3}} \text{ است.}$$

$$\text{و } x = -\sqrt{\frac{26}{6}} \text{ در انتروال } (1, 3) \text{ اشتراک نداشته و قابل قبول نیست.}$$



تمرین

1- قیمت x_0 را در تابع $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$ در انتروال $[0, 4]$ طوری پیدا کنید که قضیه رول در آن صدق کند؟

2- قیمت x_0 را در تابع $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x$ در انتروال $[0, 3]$ طوری پیدا کنید که قضیه رول در آن صدق کند؟

قاعده هوییتال (L'Hopital)

مساوات مقابل چه را بیان می کند؟

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$



- لیمیت تابع $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ را طوری دریافت کنید که $x \rightarrow 1$ تقرب کند.
 - لیمیت مشتق صورت و مخرج تابع فوق را دریافت کنید و با لیمیت آن مقایسه نمایید.
 - لیمیت تابع $f(x) = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 4x^3 + 2x^4}$ را در صورتی دریافت نمایید که $x \rightarrow \infty$ تقرب کند.
 - لیمیت مشتق صورت و مخرج تابع فوق را دریافت کنید و با لیمیت آن مقایسه نمایید.
- از فعالیت فوق، این قاعده را بیان می کنیم:

قاعده هوییتال: اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در انتروال (a, b) تعریف شده و مشتق پذیر باشد.

هرگاه لیمیت نسبت $\frac{f(x)}{g(x)}$ هنگامی که $x \rightarrow a$ شکل مبهم $\frac{0}{0}$ و هنگامی که $x \rightarrow \infty$ شکل مبهم

$\frac{\infty}{\infty}$ را اختیار نماید، جهت دریافت قیمت حد (لیمیت تابع) مشتق $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ را دریافت نموده و قیمت

گذاری می نمایم اما اگر باز هم نسبت توابع مذکور در شکل مبهم قرار داشته باشد، مشتق دوم، سوم $n \dots$ ام آن را دریافت می کنیم تا رفع ابهام گردد؛ به طور مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} = \frac{2 \cdot 2^2 + 2 - 10}{2^2 - 4} = \frac{0}{0} = 0$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{4x + 1}{2x} = \frac{4 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 2} = \frac{9}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+5}{x+2} = \frac{2 \cdot 2 + 5}{2 + 2} = \frac{9}{4}$$

یا:

مثال: با استفاده از قاعده هوییتال لمیت توابع زیر را پیدا کنید.

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin 2x}$

2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3}$

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 6}{7x^2 - 2x + 1}$

جواب اول:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin 2x} = \frac{0 + \sin 2 \cdot 0}{0 - \sin 2 \cdot 0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \sin 2x)'}{(x - \sin 2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2 \cos 2x}{1 - 2 \cos 2x} = \frac{1 + 2}{1 - 2} = -3$$

جواب دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^4 - 81}{3 - 3} = \frac{81 - 81}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^4 - 81)'}{(x - 3)'} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^3}{1} = \frac{4 \cdot 3^3}{1} = 108$$

جواب سوم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 6}{7x^2 - 2x + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2 - 4x + 6)'}{(7x^2 - 2x + 1)'}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 4}{14x - 2} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(6x - 4)'}{(14x - 2)'} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$



با استفاده از قاعده هوییتال، قیمت لمیت‌های زیر را دریافت کنید.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$

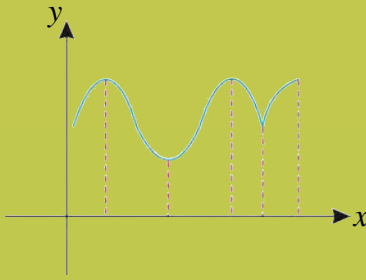
c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{3x^3}$

تطبیق نقاط بحرانی

در شکل مقابل، بلندترین و پایین‌ترین نقاط را نشان

داده و بگویید این نقاط را به چه نام یاد می‌کنند؟



1- دو عددی را پیدا کنید که حاصل جمع‌شان 20 می‌شود و حاصل ضرب آن‌ها بزرگ‌ترین قیمت ممکن را دارد.

حل: اگر عدد اولی x باشد؛ پس عدد دومی $20-x$ است و حاصل ضرب آن‌ها را به شکل تابع این طور می‌نویسیم: $f(x) = x(20-x)$ و چون عدد x در انتروال $[0, 20]$ تحول می‌کند، نقطه اعظمی مطلق تابع را در $[0, 20]$ جستجو می‌کنیم:

$$f(x) = 20x - x^2$$

$$f'(x) = 0$$

$$20 - 2x = 0$$

$$-2x = -20$$

$$x = 10$$

$$f(10) = 20 \cdot 10 - 10^2 = 200 - 100 = 100$$

$$f(0) = 20 \cdot 0 - 0^2 = 0$$

$$f(20) = 20 \cdot 20 - 20^2 = 400 - 400 = 0$$

دیده می‌شود که $(10, 100)$ نقطه اعظمی تابع است، بنابراین اعداد مطلوبی که حاصل ضرب‌شان 100 شود، عبارت‌اند از: $x_1 = 10$ و $x_2 = 10$.

2- معادله یک متحرک به شکل $x = (t-2)(t-3)$ داده شده است. سرعت متوسط متحرک را در انتروال زمانی $t_1 = 3, t_2 = 4$ دریافت کنید.

حل: نظر به تعریف سرعت متوسط می‌توانیم بنویسیم:

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{x_{(t_2)} - x_{(t_1)}}{t_2 - t_1} = \frac{x_{(4)} - x_{(3)}}{4 - 3} = \frac{2 - 0}{4 - 3} = 2$$

3- نسبت متوسط بین حجم و مساحت کره را دریافت کنید.

حل:

$$\text{حجم کره} = v_{(x)} = \frac{4}{3}\pi x^3 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3x^2 = 4\pi x^2$$

$$\text{مساحت کره} = S_{(x)} = 4\pi x^2 \Rightarrow \frac{ds}{dx} = 4\pi \cdot 2x = 8\pi x$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{4\pi x^2}{8\pi x} \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}x$$

4- بین درجه سانتی گرید (C) و فارنهایت (F) رابطه $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ موجود است. شما نسبت متوسط بین (C) و (F) را تعیین کنید.

حل: نظر به تعریف سرعت متوسط ($V_m = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$) می توانیم بنویسیم:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F + \Delta F) - C(F)}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F + \Delta F - 32) - \frac{5}{9}(F - 32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5- محیط یک زمین مستطیل شکل $200m$ است، مساحت اعظمی آن را پیدا کنید.

حل: مستطیل های زیادی را می توان با این محیط رسم نمود اما شرط این است که مساحت کدام مستطیل به کدام طول و عرض از همه زیادتر است. طول مستطیل را به x و عرض آن را به y نشان می دهیم بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$\text{محیط} = 2x + 2y = 200$$

$$\text{محیط} = x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$$

$$\text{مساحت} = x \cdot y$$

$$S = x(100 - x) = 100x - x^2, \quad D_s = IR$$

$$x > 0, \quad y > 0 \Rightarrow 100 - x > 0 \Rightarrow x < 100$$

اکنون مساحت اعظمی تابع $S = 100x - x^2$ را در انتروال $0 < x < 100$ این طور دریافت می کنیم:

$$S' = 100 - 2x$$

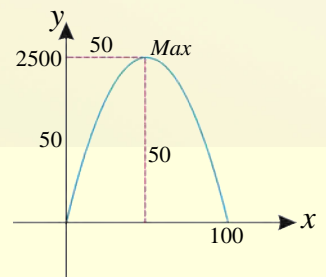
$$S' = 0 \Rightarrow 100 - 2x = 0 \Rightarrow x = 50 \Rightarrow S_{(50)} = 2500$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} S(x) = 0$$

x	0	50	100
S'		+	-
S	0	↗ 2500 ↘	0

2500



در نتیجه از شکل دیده می‌شود که بزرگ‌ترین مساحت نسبت به همه، زمانی موجود است که طول و عرض مستطیل 50 واحد باشد، مساحت آن 2500 واحد مربع می‌شود.

6- اگر مجموع دو عدد 200 باشد، آن اعداد را طوری تعیین کنید که مجموع مربعات‌شان اصغری شود.

حل: اگر اعداد مذکور x و y باشند، بناءً $x + y = 200$ است. حال اگر $x^2 + y^2 = T$ فرض نماییم لذا:

$$\begin{aligned} T_{(x)} &= x^2 + y^2 \\ &= x^2 + (200 - x)^2 \\ &= x^2 + x^2 - 400x + (200)^2 \\ &= 2x^2 - 400x + 40000 \end{aligned}$$

$$T'_{(x)} = 4x - 400$$

$$T'_{(x)} = 0$$

$$4x - 400 = 0$$

$$x = 100$$

در نتیجه گفته می‌توانیم که مجموعه کوچک‌ترین مربعات عبارت است از: $T_{(100)} = 20000$

7- نقطه A بالای منحنی $y = \frac{2}{x}$ حرکت می‌کند. کوچک‌ترین انتروال بین نقطه A و مبدأ کمیات وضعیه را تعیین کنید.

حل: مختصات نقطه A بالای منحنی $y = \frac{2}{x}$ عبارت از $A(x, \frac{2}{x})$ است، بنابراین:

$$\overline{OA} = \sqrt{x^2_{(A)} + y^2_{(A)}} = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}}$$

$$\overline{OA}^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} = d^2 \Rightarrow d'_{(x)} = (x^2)' + (\frac{4}{x^2})' = 2x - \frac{8x}{x^4} = 2x - \frac{8}{x^3}$$

$$d'_{(x)} = \frac{2x^4 - 8}{x^3}$$

$$d'_{(x)} = 0$$

$$2x^4 = 8$$

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

$$d_{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 + \frac{4}{(\sqrt{2})^2} = 2 + \frac{4}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$d_{-\sqrt{2}} = 4$$

در نتیجه، کوچک‌ترین فاصله از مبدأ 2 واحد است.

8- یک مکعب مستطیل را که قاعده آن مربع است در نظر بگیرید، اگر مجموعه سه بُعد آن 24 باشد، بزرگ‌ترین حجم مکعب مستطیل را دریافت کنید.

حل: اگر ضلع قاعده را x و ارتفاع را y بگوییم، بنابراین داریم:

$$x + x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - 2x$$

چون $y \geq 0$ است، $0 \leq x \leq 12$ می‌شود و حجم مکعب مستطیل عبارت است از:

$$V = x^2 \cdot y \Rightarrow V = x^2(24 - 2x) = 24x^2 - 2x^3$$

$$V = 24x^2 - 2x^3$$

$$V'(x) = 48x - 6x^2$$

$$V'(x) = 0$$

$$48x - 6x^2 = 0$$

$$x(48 - 6x) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$48 - 6x = 0$$

$$-6x = -48$$

$$x = 8$$

$$V(0) = 24 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3$$

$$= 0 - 0 = 0$$

$$V'(0) = 0$$

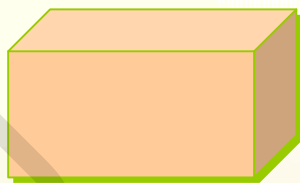
$$V(8) = 24 \cdot (8)^2 - 2 \cdot (8)^3$$

$$= 1536 - 1024 = 512$$

$$V(8) = 512$$

$$V(12) = 24 \cdot (12)^2 - 2 \cdot (12)^3 = 3456 - 3456 = 0$$

$$V(12) = 0$$



بنابراین، بزرگ‌ترین حجم مکعب مستطیل 512 cm^3 است.

تمرین



1- تحولات تابع $y = x^3 + x^2 + x + 1$ را دریافت و منحنی آن را رسم کنید.

2- دو عدد را طوری به دست آرید که حاصل جمع آنها 20 و حاصل ضرب آنها بزرگ‌ترین قیمت ممکن را داشته باشد.

3- از یک تخته آهن چادر مربعی که هر ضلع آن 1m طول دارد، یک بکس سرباز ساخته می‌شود. از چهار کنج آن چهار مربع مساوی خرد ببرید و بعد آن را قات کنید. مربع‌های خرد باید به کدام اندازه بریده شوند تا بکس مذکور حجم اعظمی ممکن را داشته باشد.

4- نزدیک‌ترین نقطه گراف $y = x^2$ را به نقطه $A(0, 3)$ دریافت کنید.

نکات مهم فصل

- یک تابع زمانی متزايد گفته می‌شود که تابع $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ متمادی و در انتروال (a, b) مشتق پذیر و $f'(x) > 0$ باشد.
- یک تابع زمانی متناقص گفته می‌شود که تابع $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ متمادی و در انتروال (a, b) مشتق پذیر و $f'(x) < 0$ باشد.
- متزايد بودن یک تابع به این معناست که با تزايد متحول x قیمت تابع نیز زیاد می‌شود و متناقص بودن تابع به این معناست که هرگاه متحول x تزايد نماید قیمت تابع کم می‌شود.
- در یک تابع بلندترین نقطه به نام اعظمی (Maximum) و پایین ترین نقطه به نام اصغری (Minimum) یاد می‌شود. و هر دو نقطه به نام نقاط بحرانی یا نقاط Extreme یاد می‌شوند.
- **Maximum مطلق:** نقطه $(x_0, f(x_0))$ به نام اعظمی مطلق یاد می‌شود. هرگاه در هر ساحه تعریف برای هر x ، $f(x) \leq f(x_0)$ باشد؛ $f(x_0)$ را اعظمی مطلق گویند.
- **Minimum مطلق:** نقطه $(x_0, f(x_0))$ را اصغری مطلق گویند. هرگاه در هر ساحه تعریف $f(x)$ برای هر x ، $f(x) \geq f(x_0)$ باشد؛ $f(x_0)$ را اصغری مطلق گویند.
- منحنی تابع $y = f(x)$ در یک انتروال محدب گفته می‌شود هرگاه در این انتروال به منحنی مماس رسم شود و این مماس در قسمت بالایی منحنی واقع باشد. در این صورت، مشتق دوم تابع یعنی $f''(x) < 0$ منفی به دست می‌آید.
- منحنی تابع $y = f(x)$ در یک انتروال مقعر می‌باشد در صورتی که در این انتروال به منحنی مماس رسم شود و منحنی در بالای مماس واقع شود، در این حالت مشتق دوم تابع یعنی $f''(x) > 0$ مثبت به دست می‌آید.
- نقاطی که تابع را از محدبیت به مقعریت و یا برعکس خود تغییر می‌دهد. به نام نقاط انعطاف یا نقاط Inflection یاد می‌شود.
- توابعی که شکل $\frac{ax+b}{cx+d}$ را داشته باشد، به نام توابع هوموگرافیک یاد می‌شود؛ به شرط اینکه: $c \neq 0$ باشد.

- هرگاه تابع $f(x)$ در انتروال $a \leq x \leq b$ متمادی و در انتروال $a < x < b$ مشتق‌پذیر و $f(a) = f(b)$ باشد؛ پس کم از کم یک نقطه x_0 در انتروال $a < x < b$ وجود دارد طوری که $f'(x_0) = 0$ است و این قضیه به نام قضیه رول یاد می‌شود.

- هرگاه تابع $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ متمادی و در انتروال (a, b) مشتق‌پذیر باشد؛ پس یک عدد x_0 در وسط a و b طوری که $a < x_0 < b$ باشد، وجود دارد و $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ است که به نام قضیه قیمت متوسط یاد می‌شود.

- **قاعده هوییتال:** اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در انتروال (a, b) تعریف و مشتق‌پذیر باشد.

هرگاه لیمیت نسبت $\frac{f(x)}{g(x)}$ به قیمت $x = a$ شکل مبهم $\frac{0}{0}$ را و به قیمت $x = \infty$ شکل مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ را اختیار نماید، جهت دریافت قیمت حد (لیمیت تابع) مشتق $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ را دریافت نموده قیمت گذاری می‌نمایم اما اگر باز هم نسبت توابع مذکور در شکل مبهم قرار داشته باشد مشتق دوم، سوم ... n -ام آنرا دریافت می‌کنیم تا رفع ابهام گردد.

تمرینات عمومی فصل سوم

به سوالات زیر چهار جواب داده شده است. شما جواب صحیح را انتخاب کنید.

1- اگر یک تابع در انتروال $[0, b]$ متمادی و مشتق پذیر باشد این تابع وقتی متزاید است که:

a) $f(x) = 0$ b) $f(x) < 0$ c) $f'(x) > 0$ d) $f(x) \geq 0$

2- در یک تابع بلندترین نقطه را:

a) هیچ کدام b) Inflection می گویند c) Maximum می گویند d) Minimum می گویند

3- نقاط بحرانی تابع $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x}$ عبارت است از:

a) دو نقطه b) یک نقطه c) سه نقطه d) ندارد

4- نقطه‌یی که تابع خود را از محدبیت به مقعریت تبدیل می کند:

a) نقطه اعظمی b) نقطه انعطاف c) نقطه اصغری d) هیچ کدام

5- ساحت تعریف تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ عبارت است از:

a) $(-\infty, +\infty)$ b) $(-\infty, 0)$ c) $(0, -\infty)$ d) هیچ کدام

6- مجانب عمودی تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ عبارت است از:

a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = -1$ d) $x = -2$

7- مجانب عمودی توابع هوموگرافیک عبارت است از:

a) $y = \frac{a}{c}$ b) $x = -\frac{d}{c}$ c) $y = \frac{c}{a}$ d) $y = -\frac{c}{d}$

8- مجانب افقی تابع $g(x) = \frac{4x^2-6x}{x^2-4}$ عبارت است از:

a) 4 b) 6 c) -6 d) -4

9- از روابط زیر، کدام یک درست است:

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f'(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ d) هیچ کدام

سوالات زیر را حل نمایید.

1. میل منحنی تابع $f(x) = x^2 - x$ را در نقطه $P(3,0)$ تعیین کنید؟
2. در تابع $f(x) = -x^2$ تغییرات متوسط را در انتروال $[3,4]$ پیدا کنید؟
3. با استفاده از خارج قسمت نیوتن مشتق توابع زیر را دریابید:
1) $f(x) = 2x$ 2) $f(x) = 3x^2 - 1$ 3) $f(x) = \sqrt{2}x$
4. در نقاط داده شده مشتق توابع زیر را پیدا کنید:
1) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = -1$ 2) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$
5. تابع مشتق توابع زیر را دریابید:
1) $f(x) = 2x - 4x^2$ 2) $f(x) = 3x^3 - 1$ 3) $f(x) = \sqrt{2}x$
6. در نقاط داده شده مشتق توابع زیر را دریابید:
1) $f(x) = 7x^2 - 3x$, $x_0 = -1$
2) $f(x) = 6x^2 - 2x - 1$, $x_0 = \frac{1}{2}$
7. از تابع $f(x) = 3x^5 - 4x^2 - 3x$ چهار مرتبه مشتق گرفته و گراف آن را رسم نمایید.
8. مشتق ضمنی تابع $x^2y + 6y^3 = x - 3$ را دریابید.
9. مشتق توابع زیر را دریابید.
- 1) $f(x) = x^3 \sec x$ 2) $f(x) = \sin(3x - 1)$ 3) $f(x) = \cos^2 2x$
10. کدام عدد مثبت با معکوس خود جمع گردد، حاصل جمع آن‌ها از هر دو عدد کوچک‌تر می‌شود؟
11. گراف تابع $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ را رسم کنید.
12. گراف تابع $f(x) = \frac{4x^2}{x^2 + 1}$ را رسم کنید.
13. گراف تابع مثلثاتی $y = \sin x$ را رسم کنید.
14. گراف تابع مثلثاتی $y = \tan x$ را رسم کنید.

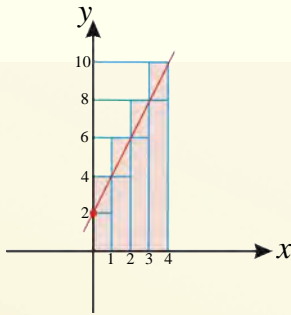
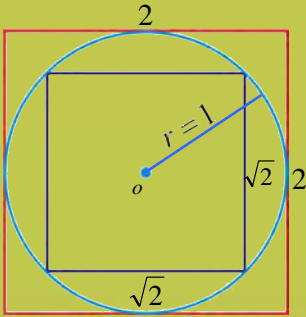
فصل چهارم انتیگرال‌ها



مجموع ریمان

Riemann's Sum

مساحت چهارضلعی محیطی و محاطی دایرهٔ مقابل را که دارای شعاع یک واحد طول است، حساب کنید و بگویید که مساحت این دایره چه رابطه‌یی با مساحت چهارضلعی‌های مقابل دارد.



فعالیت

• گراف تابع $f(x) = 2x + 2$ را در انتروال $[0, 4]$ رسم و سطح محصور شدهٔ آن را خط خط کنید.

• مجموع مساحت‌های چهار مستطیل تحتانی و مجموع مساحت‌های چهار مستطیل فوقانی گراف تابع $y = 2x + 2$ را که در شکل نشان داده شده اند، دریافت کنید.

• مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تحتانی و مجموع مساحت‌های مستطیل‌های فوقانی با مساحت تحت گراف تابع در فاصلهٔ داده شده چه رابطه‌یی دارند؟

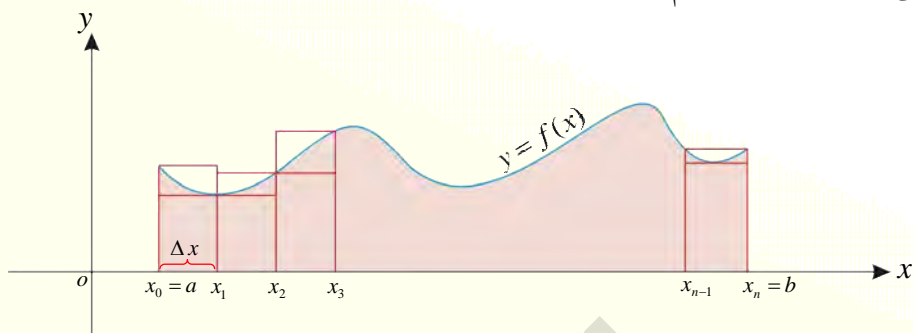
• عین فعالیت بالا را این بار با هشت مستطیل مساوی تحتانی و هشت مستطیل مساوی فوقانی تکرار و نتیجه را با مساحت تحت گراف در فاصلهٔ مذکور مقایسه کنید.

• هرگاه تقسیم فاصله را به خاطر تشکیل مستطیل‌های^۱ تحتانی و فوقانی گراف تابع بیشتر ساخته برویم، قیمت مجموعی مساحت‌های مستطیل‌های تحتانی و قیمت مجموعی مساحت‌های مستطیل‌های فوقانی به کدام قیمت نزدیک شده می‌روند؟

از فعالیت فوق، این تعریف به دست می‌آید:

^۱ هرگاه تقسیمات فواصل بالای محور x بیشتر شود یا به عبارت دیگر، به هر اندازه که تعداد مستطیل‌ها زیاد شود به همان اندازه مساحت تحت گراف دقیق‌تر به دست می‌آید.

تعریف: فرض کنیم تابع $y = f(x)$ در انتروال بسته $[a, b]$ متمادی و تعریف شده است اگر بخواهیم مساحت ناحیه واقع بین محور x و منحنی تابع $y = f(x)$ را که قابل تبدیل به اشکال هندسی نیست، محاسبه کنیم:



انتروال بسته $[a, b]$ را به n مستطیل‌ها تقسیم می‌کنیم، طوری‌که عرض مستطیل‌ها از رابطه $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ به دست می‌آید و طول این مستطیل‌ها عبارت از قیمت تابع در همان نقطه است. طول هر انتروال این مستطیل‌ها برای $i = 1, 2, \dots, n$ قرار زیر است:

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \dots, x_i = a + i\Delta x, \dots, x_n = b$$

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

اگر مساحت‌های مستطیل‌های تحتانی شکل را به $f(x_{i-1})\Delta x$ و مساحت مستطیل‌های فوقانی شکل بالا را به $f(x_i)\Delta x$ نشان دهیم، داریم که:

$$\text{مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تحتانی} = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x$$

$$\text{مجموع مساحت‌های مستطیل‌های فوقانی} = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x \quad \text{اگر مساحت محصورشده را به } A \text{ نشان دهیم، داریم که:}$$

حال اگر از اطراف رابطه بالا لیمیت بگیریم، داریم که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x \leq \lim_{n \rightarrow \infty} A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x$$

نظر به قضیه ساندویچ داریم که:

پس $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$ را مجموع ریمان و اگر از آن مجموع لیمت بگیریم، $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$ را لیمت مجموع ریمان گویند.

مثال 1: با تقسیم نمودن انتروال $[0, 2]$ به چهار قسمت مساوی، مساحت بین منحنی تابع $y = x^2 + 1$ و محور x را دریابید.

حل: اگر انتروال $[0, 2]$ را به چهار قسمت مساوی تقسیم کنیم، عرض مستطیل‌ها چنین به دست

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{می‌آید:}$$

طول هر انتروال این مستطیل‌ها عبارت است از:

$$x_0 = a = 0, \quad x_1 = a + \Delta x = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 1, \quad x_3 = a + 3\Delta x = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = 2$$

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_3, x_4]$$

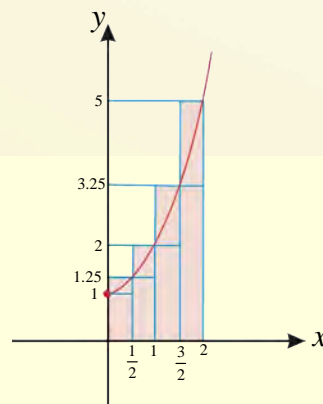
$$\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[1, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

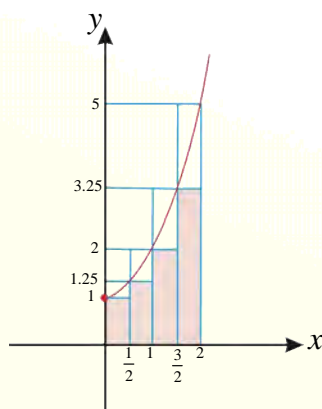
قیمت‌های به دست آمده را به عوض x در تابع وضع می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 + 1, f(0) = 1$$

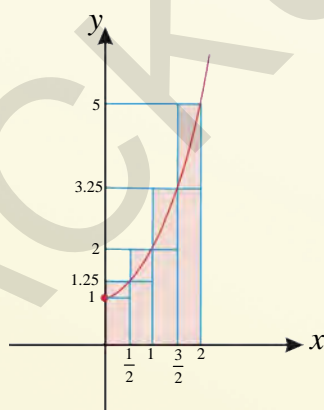
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1.25, f(1) = 2$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 3.25, f(2) = 5$$





$$\text{مجموع مساحت های مستطیل های تحتانی} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1.25 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3.25 \cdot \frac{1}{2} = 3.75$$



$$\text{مجموع مساحت های مستطیل های فوقانی} = 1.25 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3.25 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = 5.75$$

$$3.75 < A < 5.75$$

مثال 2: لیمت مجموع ریمان را برای تابع $f(x) = 1 + x$ در انتروال $[1, 10]$ دریابید.

حل:

یادداشت:

$$\sum_{i=1}^n c = cn$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x i = 1 + \left[\frac{9}{n}\right] i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n (1 + x_i) \Delta x \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\Delta x \sum_{i=1}^n (1 + x_i) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\Delta x \sum_{i=1}^n 1 + \Delta x \sum_{i=1}^n x_i \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{9}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \Delta x \sum_{i=1}^n (a + \Delta x i) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{9}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{9}{n} i \right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{9}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{9}{n} \left(\sum_{i=1}^n 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^n i \right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{9}{n} \cdot n + \frac{9}{n} \left(n + \frac{9}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{9}{n} \left(n + \frac{9n^2 + 9n}{2n} \right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{9}{n} \left(\frac{2n^2 + 9n^2 + 9n}{2n} \right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{9}{n} \left(\frac{11n^2 + 9n}{2n} \right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{99n^2 + 81n}{2n^2} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{99n^2}{2n^2} + \frac{81n}{2n^2} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{99}{2} + \frac{81}{2n} \right]$$

$$= 9 + \frac{99}{2} = 58.5$$

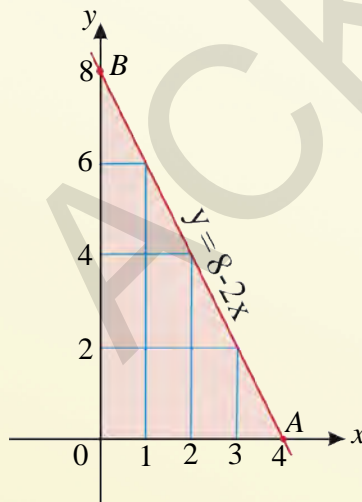


1- با تقسیم نمودن انتروال $[0, 3]$ به شش قسمت مساوی، مساحت محصور بین خط $y = 3x$ و محور x را محاسبه کنید.

2- برای $\Delta x = 0.5$ و با در نظر داشت قیمت‌های داده شده، جدول زیر گراف را رسم و مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تحتانی و فوقانی آن‌را حساب کنید:

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	14	20	26	32	38	44	50

3- مساحت مثلث OAB تحت خط $y = 8 - 2x$ شکل زیر را در انتروال $[0, 4]$ با استفاده از لیست مجموع ریمان دریابید.



مفهوم انتیگرال

Concept of Integral

همان طور که می دانید، مساحت تحتانی و فوقانی اشکال

توسط انتیگرال محاسبه می گردد.

آیا می توان مساحت فوقانی تصویر مقابل را دریافت کرد؟



تابعی که مشتق آن معین باشد و یا به عبارۀ دیگر، لیمت مجموع ریمان را انتیگرال گویند. علامۀ انتیگرال (\int) می باشد که کش شدۀ حرف S کلمۀ sum یا مجموع ریمان است. مثلاً

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int f(x) dx$$

که در اینجا $f(x)$ را تابع و dx را متغیر انتیگرال گیری نظر به متحول x گویند.

معمولاً انتیگرال ها دو نوع اند؛ انتیگرال غیرمعین و معین که به ترتیب، به مطالعۀ هر یک از آن ها می پردازیم:

1- انتیگرال غیرمعین Indefinite Integral



- اگر تابع $F(x) = 2x^2 - 1$ باشد، از تابع داده شده مشتق بگیرید؟
- از حاصل مشتق به دست آمده، دوباره انتیگرال بگیرید.
- حاصل انتیگرال به دست آمده را با تابع اولیه مقایسه و بگویید که (-1) در تابع مذکور به نام چه یاد می شود؟
- اگر (-1) را در تابع فوق C بنامیم، تابع $f(x)$ مساوی به چیست؟
- فعالیت فوق را برای تابع $F(x) = x^6 + 1$ تکرار کنید و بگویید که $f(x)$ مساوی به چیست؟

از فعالیت صفحه قبل، تعریف زیر به دست می آید:

تعریف: هرگاه تابع $f(x)$ در انتروال بسته $[a, b]$ تعریف شده و $F(x)$ یک تابع اولیه از $f(x)$ باشد، ست توابع $F(x) + C$ را در حالی که C یک عدد ثابت اختیاری است، به نام انتیگراال غیرمعین از $f(x)$ یاد می کنند و می نویسند:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

مثال 1: $\int x \, dx$ را دریابید.

حل:
$$\int x \, dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$$

مثال 2: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}} \, dx$ را حساب کنید.

حل:
$$\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}} \, dx = \int x^{-\frac{3}{7}} \, dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + C = \frac{7}{4} \sqrt[7]{x^4} + C$$

مثال 3: $\int x^{\frac{3}{2}} \, dx$ را دریابید.

حل:
$$\int x^{\frac{3}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5} \sqrt{x^5} + C$$



انتیگراال های زیر را محاسبه کنید:

a) $\int \sqrt[5]{x^3} \, dx$

d) $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^2}} \, dx$

b) $\int \frac{1}{x^4} \, dx$

e) $\int \sqrt[8]{x^4} \cdot x \, dx$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$

خواص انتیگرال غیر معین

Properties of Indefinite Integral

خواص لیمت و مشتق را قبلاً مطالعه نموده‌اید،

آیا این خواص در انتیگرال‌های غیر معین نیز

موجود می‌باشد؟

$$\left. \begin{aligned} \int k \, dx \\ \int [f(x) \pm g(x)] \, dx \\ \int [f(x) \cdot g(x)] \, dx \\ \int \frac{f(x)}{g(x)} \, dx \quad , \quad g(x) \neq 0 \end{aligned} \right\} = ?$$



فعالیت

- با استفاده از خواص مشتق، مشتقات توابع زیر را دریابید:

$$f(x) = 3x^4$$

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

از فعالیت فوق نتیجه زیر به دست می‌آید:

همان‌طور که برای دریافت مشتق توابع از قوانین یا خواص مشخص استفاده می‌شد، انتیگرال‌های

غیر معین نیز دارای خواصی اند که آنها را بدون ثبوت قبول می‌کنیم.

1- اگر k یک عدد ثابت باشد، داریم که:

$$\int k \, dx = k \int dx = kx + C$$

مثال: $\int 5 \, dx$ را دریابید؟

$$\int 5 \, dx = 5 \int dx = 5x + C$$

حل:

$$2- \text{ اگر } n \neq -1 \text{ باشد، پس داریم: } \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

مثال: $\int x^4 dx$ را دریابید؟

حل: $\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$

3- اگر a یک عدد ثابت و $f(x)$ تابع باشد، پس:

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

مثال: $\int 2x^2 dx$ را دریابید؟

حل: $\int 2x^2 dx = 2 \int x^2 dx = 2 \frac{x^3}{3} + C = \frac{2}{3}x^3 + C$

4- اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، در این صورت حاصل جمع و حاصل تفریق توابع تحت انتیگرال مساوی است با حاصل جمع و حاصل تفریق انتیگرال‌ها به طور جداگانه:

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

مثال‌ها:

$$\int (2x^2 + 3) dx = \int 2x^2 dx + \int 3 dx = \frac{2}{3}x^3 + 3x + C$$

$$\int (8 - 2x) dx = 8 \int dx - 2 \int x dx = 8x - x^2 + C$$

5- اگر یک ترادف توابع تحت انتیگرال باشد، در این صورت انتیگرال آن مساوی است با مجموع انتیگرال هر حد آن:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx$$

مثال:

$$\begin{aligned} \int [x^3 - 6x^2 + 9x + 1] dx &= \int x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 9x dx + \int dx \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + C \end{aligned}$$

6- اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، در این صورت حاصل ضرب دو تابع تحت انتیگرال مساوی نیست با حاصل ضرب انتیگرال‌های توابع به طور جداگانه:

$$\int [f(x) \cdot g(x)] dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$$

مثال: اگر $f(x) = x + 1$ و $g(x) = x - 2$ باشد.

حل الف: ابتدا برای دریافت انتیگرال، عملیه ضرب دو تابع را اجرا کرده و بعداً انتیگرال می گیریم:

$$\begin{aligned}\int [f(x) \cdot g(x)] dx &= \int [(x+1)(x-2)] dx = \int (x^2 - 2x + x - 2) dx \\ &= \int (x^2 - x - 2) dx \\ &= \int x^2 dx - \int x dx - \int 2 dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C\end{aligned}$$

حل ب: حال برای دریافت انتیگرال از هر تابع جداگانه انتیگرال گرفته و بعداً هر دو حل را با هم مقایسه می کنیم:

$$\begin{aligned}\int f(x) dx \cdot \int g(x) dx &= \int (x+1) dx \cdot \int (x-2) dx = (\int x dx + \int dx)(\int x dx - \int 2 dx) \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + x + C\right)\left(\frac{x^2}{2} - 2x + C\right) = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) + C \\ &\Rightarrow \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C \neq \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) + C\end{aligned}$$

در نتیجه به مشاهده می رسد که مساوات فوق حقیقت ندارد.

7- اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، در این صورت انتیگرال حاصل تقسیم دو تابع مساوی نیست با حاصل تقسیم انتیگرال های هر یک از آنها:

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx \neq \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx}, \quad g(x) \neq 0$$

مثال: اگر $f(x) = x^2 + 2x$ و $g(x) = x$ باشد.

حل الف: ابتدا انتیگرال حاصل تقسیم دو تابع را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned}\int \frac{f(x)}{g(x)} dx &= \int \frac{x^2 + 2x}{x} dx = \int \frac{x(x+2)}{x} dx \\ &= \int (x+2) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + C\end{aligned}$$

حل ب: حال انتیگرال صورت و مخرج را جداگانه دریافت نموده و بعداً هر دو حل را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\int \frac{f(x)}{g(x)} dx &= \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx} = \frac{\int (x^2 + 2x) dx}{\int x dx} = \frac{\int x^2 dx + \int 2x dx}{\int x dx} \\ &= \frac{\frac{1}{3}x^3 + x^2}{\frac{1}{2}x^2} + C = \frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2} + \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} + C \\ &= \frac{2}{3}x + 2 + C = \frac{2}{3}x + C\end{aligned}$$

در نتیجه، معلوم می‌شود که مساوات فوق حقیقت ندارد.

تمرین

از خواص انتیگرال استفاده نموده، انتیگرال‌های زیر را به دست آرید:

a) $\int -17 dx = ?$

b) $\int \frac{(1+x)^2}{1+x} dx = ?$

c) $\int 2x^4 dx = ?$

d) $\int \frac{1}{x^5} dx = ?$

e) $\int (2x^2 + 4x^3 - 5x + 9) dx = ?$

f) $\int (2x+3)^6 dx = ?$

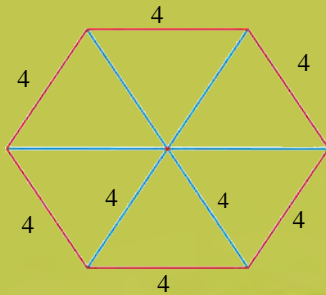
g) $\int \frac{x^3 + 2x^2}{x^2} dx = ?$

h) $\int (2+x) dx = ?$

انتیگرال معین

Definite Integral

مجموع مساحت‌های تمام مثلث‌های داخل شش ضلعی را دریافته و با مساحت شش ضلعی مقایسه کنید.



- گراف تابع $f(x) = 2x$ را در انتروال $[2, 5]$ برای $n = 5$ رسم نموده و مساحت تحتانی آن را دریابید.
 - در شکل مساحت تحت گراف بین کدام دو عدد محدود گردیده است؟
- از فعالیت فوق تعریف زیر را می‌توان بیان کرد:

تعریف: لیمت مجموع ریمان تابع $f(x)$ در انتروال بسته $[a, b]$ وقتی که عدد n به بی‌نهایت تقرب کند و بزرگ‌ترین طول انتروال‌های فرعی (Δx) به صفر نزدیک گردد به نام انتیگرال معین تابع $f(x)$ از

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{یاد می‌شود یعنی:}$$

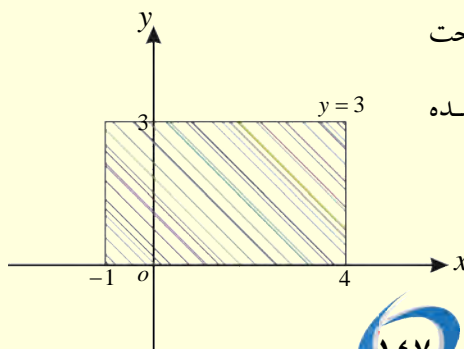
که در اینجا a را سرحد پایینی و b را سرحد بالایی انتیگرال گویند.

مثال 1: قیمت انتیگرال $\int_1^3 x^2 dx$ را دریابید.

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$$

حل:

مثال 2: مساحت محصور توسط خط $y = 3$ و محور x در انتروال $[-1, 4]$ را حساب کنید.



حل: انتیگرال معین $\int_{-1}^4 3 dx$ نشان دهنده مساحت

مستطیل است که در شکل مقابل نشان داده شده است.

مساحت این مستطیل مساوی است با حاصل ضرب طول در عرض آن:

$$\text{مساحت مستطیل} = 3(4 - (-1)) = 3 \cdot 5 = 15$$

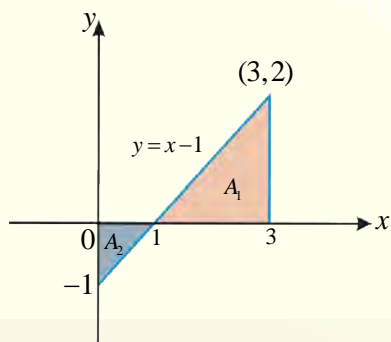
$$\int_{-1}^4 3 \, dx = [3x]_{-1}^4 = 3(4 + 1) = 3 \cdot 5 = 15$$

با استفاده از انتیگرال داریم که:

مثال 3: مساحت محصور شده توسط خط $y = x - 1$ و

محور x را در انتروال $[0, 3]$ دریابید.

حل:



با استفاده از شکل، اول مساحت مثلث بزرگ یعنی طرف راست را به دست می آوریم:

$$A_1 = \frac{1}{2}(2 \cdot 2) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$$

مساحت مثلث کوچک عبارت است از:

$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$

مجموع مساحت های A_1 و A_2 مساوی است با:

$$\int_0^3 (x-1) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^3 = \left[\frac{3^2}{2} - 3\right] - 0 = \frac{9}{2} - 3 = 1.5$$

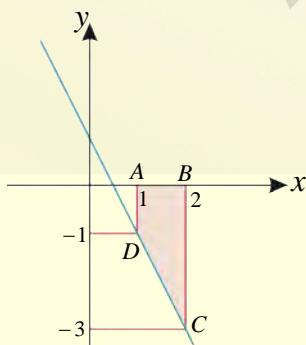
در نتیجه، قیمت انتیگرال مورد نظر عبارت است از:



تمرین

1- با استفاده از شکل مقابل مساحت محصور بین

خط $y = -2x + 1$ و محور x را محاسبه کنید.



2- مجموع مساحت های مستطیل های تحتانی و فوقانی تابع $f(x) = x^2$ را در انتروال $[0, 1]$ و $n = 4$ حساب کنید.

خواص انتیگرال معین

Properties of definite Integral

آیا با استفاده از خواص انتیگرال غیرمعین

می توان رابطه های مقابل را تکمیل نمود؟

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b c \, dx \\ \int_a^b [f(x) \pm g(x)] \, dx \\ \int_a^a f(x) \, dx \end{aligned} \right\} = ?$$



فعالیت

• مجموعه $\sum_{k=1}^4 3k^2$ را حساب کنید.

• قیمت $\int_a^b x \, dx$ را در انتروال $[-1, 1]$ دریابید.

• قیمت $\int_0^2 (1+3x) \, dx$ را محاسبه کنید.

از فعالیت فوق نتیجه زیر را می یابیم که:

محاسبه بعضی از انتیگرال ها با گذاشتن قیمت امکان پذیر می شود، اما از بعضی از آنها امکان پذیر نیست؛ بنابراین برای حل آنها ضرورت است که خواص انتیگرال های معین را ثبوت کنیم:

1- $\int_a^b C \, dx$ عبارت از انتیگرال تابع ثابت C در انتروال $[a, b]$ است.

$$\int_a^b C \, dx = C \int_a^b dx = C[x]_a^b = C(b-a)$$

ثبوت: انتروال $[a, b]$ را به n قسمت مساوی یعنی $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ تقسیم و برای هر عدد x_i از

$$f(x_i) = C$$

انتروال i - ام داریم که: $i = 0, 1, 2, \dots, n$

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n C \Delta x_i = C(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = C\left(\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} + \dots + \frac{b-a}{n}\right)$$

$$= C(b-a)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = C(b-a)\frac{n}{n} = C(b-a) \Rightarrow \int_a^b C \, dx = C(b-a)$$

مثال: انتیگرال $\int_3^4 dx$ را محاسبه کنید.

حل:
$$\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4 - 3 = 1$$

2- اگر $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ انتیگرال پذیر و k یک عدد حقیقی ثابت باشد؛ در آن صورت داریم:

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

ثبوت:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n k f(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} k \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \\ &= k \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = k \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

مثال: انتیگرال معین $\int_{-2}^2 4 dx$ را محاسبه نمایید.

$$\int_{-2}^2 4 dx = 4 \int_{-2}^2 dx = 4[x]_{-2}^2 = 4(2 + 2) = 4(4) = 16$$

3- اگر تابع $F(x)$ تابع اولیه از $f(x)$ و در انتروال $[a, b]$ متمادی باشد، در این صورت داریم:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

ثبوت:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x &= \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = -(-F(b) + F(a)) \\ &= -(F(a) - F(b)) = - \int_b^a f(x) dx \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \end{aligned}$$

مثال: تساوی انتیگرال $\int_2^3 2x dx = - \int_3^2 2x dx$ را حساب کنید.

حل: ابتدا انتیگرال طرف راست و بعداً طرف چپ مساوات را محاسبه می کنیم:

$$\int_2^3 2x dx = \left[\frac{2x^2}{2} \right]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2} = \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2x dx = \left[\frac{2x^2}{2} \right]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2} = \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

با توجه به قیمت‌های به‌دست آمده، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\int_2^3 2x \, dx = -\int_3^2 2x \, dx$$

4- اگر تابع $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ متمادی باشد، در آن صورت داریم که:

$$\int_a^a f(x) \, dx = 0$$

ثبوت: چون $\Delta x = 0$ است، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x &= \int_a^a f(x) \, dx = F(a) - F(a) = 0 \\ \Rightarrow \int_a^a f(x) \, dx &= 0 \end{aligned}$$

مثال: انتیگرال $\int_3^3 3x^2 \, dx$ را حساب کنید.

حل:

$$\int_3^3 3x^2 \, dx = \left[\frac{3x^3}{3} \right]_3^3 = [x^3]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$$

5- اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع انتیگرال‌پذیر در انتروال $[a, b]$ باشند، در آن صورت داریم:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx$$

ثبوت:

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) \pm g(x)] \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i) \pm g(x_i)] \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \pm \sum_{i=1}^n g(x_i) \Delta x \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx \end{aligned}$$

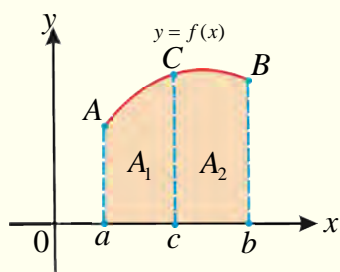
مثال‌ها:

a) $\int_0^1 (4 + 3x^2) \, dx = \int_0^1 4 \, dx + \int_0^1 3x^2 \, dx = 4 \int_0^1 1 \, dx + 3 \int_0^1 x^2 \, dx = 4[x]_0^1 + 3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 4 + 1 = 5$

b) $\int_0^3 (x^2 - 1) \, dx = \int_0^3 x^2 \, dx - \int_0^3 1 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27-9}{3} = \frac{18}{3} = 6$

6- اگر $f(x)$ در انتروال بسته‌یی که شامل نقاط a ، b و c است، انتیگرال پذیر باشد داریم که:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



ثبوت: در اینجا انتروال $[a, b]$ را مطابق شکل به دو انتروال $[a, c]$ و $[c, b]$ تقسیم نموده، انتیگرال $f(x)$ را در هر یک از این انتروال‌ها در نظر می‌گیریم. طبق مفهوم اصلی انتیگرال، $A = \int_a^b f(x) dx$ در حقیقت مساحت سطحی

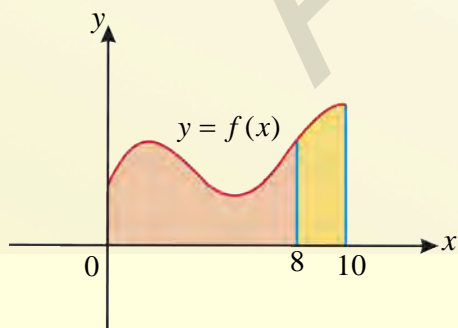
محصور بین گراف تابع $y = f(x)$ و محور x در انتروال $[a, b]$ است. در حالی که مساحت‌های سطوحی که بین همین گراف به ترتیب در انتروال‌های $[a, c]$ و $[c, b]$ با محور x محصور اند و در

شکل واضح دیده می‌شوند، عبارت اند از: $A_1 = \int_a^c f(x) dx$ و $A_2 = \int_c^b f(x) dx$

در نتیجه، نظر به بالا گفته می‌توانیم که: $A = A_1 + A_2 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

مثال: اگر انتیگرال $\int_0^{10} f(x) dx = 17$ و $\int_0^8 f(x) dx = 12$ باشد، قیمت $\int_8^{10} f(x) dx$ را حساب کنید.

حل:



$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ \int_0^{10} f(x) dx &= \int_0^8 f(x) dx + \int_8^{10} f(x) dx \end{aligned}$$

حال قیمت انتیگرال‌ها را وضع و محاسبه می‌کنیم:

$$\int_8^{10} f(x) dx = \int_0^{10} f(x) dx - \int_0^8 f(x) dx = 17 - 12 = 5$$

7- اگر توابع $f(x) \leq g(x)$ در انتروال $[a, b]$ انتیگراپذیر باشند، در آن صورت داریم که:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

ثبوت:

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [g(x_i) - f(x_i)] \Delta x$$

از آنجا که $g(x) - f(x) \geq 0$ و $\Delta x \geq 0$ است، هر یک از حدود سلسله اخیر غیر منفی و لیمت

آن نیز غیر منفی می باشد؛ یعنی:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [g(x_i) - f(x_i)] \Delta x \geq 0 \Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)] dx \geq 0$$

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$$

مثال: اگر $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ و $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ باشد، برای $x > 1$ ، $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ را

دریابید.

حل:

$$\int_a^b \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx \leq \int_a^b \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$\int_a^b 1 dx - \int_a^b \frac{x^2}{4} dx \leq \int_a^b 1 dx + \int_a^b \frac{x^2}{2} dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12}[x^3]_a^b \leq [x]_a^b + \frac{1}{6}[x^3]_a^b$$

می دانیم که $(b-a) > 0$ است، بنا بر آن:

$$(b-a) - \frac{1}{12}(b^3 - a^3) \leq (b-a) + \frac{1}{6}(b^3 - a^3) \quad / \div (b-a)$$

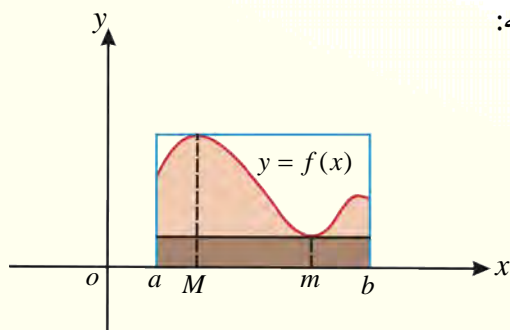
$$1 - \frac{1}{12}(a^2 + ab + b^2) \leq 1 + \frac{1}{6}(a^2 + ab + b^2)$$

$$-\frac{1}{12}(b^3 - a^3) \leq +\frac{1}{6}(b^3 - a^3) \quad / \div (a^2 + ab + b^2)$$

$$-\frac{1}{12} < \frac{1}{6}$$

8- اگر تابع $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ متمادی و M, m به ترتیب قیمت اصغری مطلق و اعظمی

مطلق تابع در این انتروال باشند، در این صورت:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$


ثبوت: چون $m \leq f(x) \leq M$ است، داریم که:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

رابطه اخیر، به نام قضیه تخمینی انتیگرا یاد می گردد.

مثال: انتیگرا $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ را به طور تخمینی حساب کنید.

حل: چون تابع $f(x) = e^{-x^2}$ در انتروال $[0, 1]$ متمادی است و $M = f(0) = e^0 = 1$ اعظمی مطلق و $m = f(1) = e^{-1}$ اصغری مطلق دارد، داریم که:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$e^{-1}(1-0) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1(1-0)$$

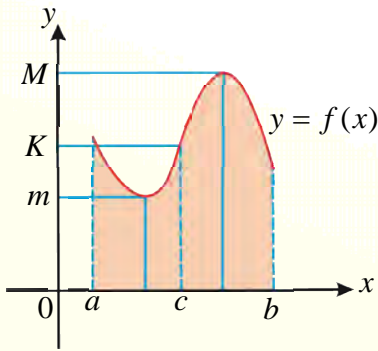
$$e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$$

$$e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0.3679 \Rightarrow 0.3679 \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$$

در نتیجه، قیمت انتیگرا مذکور بین عدد 1 و 0.3679 قرار دارد.

9- اگر تابع $f(x)$ در انتروال بسته $[a, b]$ متمادی باشد، در این صورت یک عدد حقیقی c ،

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a) \quad \text{وجود دارد که: } a \leq c \leq b$$



ثبوت: برای $a < b$ هرگاه m و M قیمت‌های
اصغری و اعظمی مطلق تابع در انتروال $[a, b]$
باشند، مانند شکل مقابل بنابر قضیه تخمین
انتیگرال برای $c \in [a, b]$ داریم که:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

فرض می‌کنیم $K = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ است، بنابراین $m \leq K \leq M$ می‌باشد و برای هر عدد
حقیقی c ، $a \leq c \leq b$ داریم که $K = f(c)$ است، پس:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

رابطه اخیر، به نام قضیه قیمت متوسط یاد می‌گردد؛ زیرا عدد $f(c)$ عبارت از قیمت متوسط تابع
 $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ است.

مثال: تابع $f(x) = x^2$ را در انتروال $[1, 4]$ در نظر بگیرید. آیا می‌توان نشان داد.

$$\int_1^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^4 = \left[\frac{64}{3} - \frac{1}{3} \right] = \left[\frac{64-1}{3} \right] = \frac{63}{3} = 21$$

حل:

چون تابع $f(x) = x^2$ است، حال اگر به عوض x قیمت c را در تابع وضع کنیم، $f(c) = c^2$
می‌شود که از اینجا نظر به فارمول قیمت متوسط، قیمت c به‌طور زیر به دست می‌آید:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

حال در رابطه بالا قیمت وضع می‌کنیم:

$$\int_1^4 x^2 dx = c^2(4-1)$$

$$21 = 3c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{21}{3} \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$k = f(c) \quad , \quad f(c) = c^2 = (\sqrt{7})^2 = 7 \Rightarrow f(c) = 7 \quad , \quad k = 7$$

پس واضح شد که یک قیمت تابع مساوی با k می‌شود و $4 < \sqrt{7} < 1$ است.
 از آنجا که مساحت مستطیل عبارت از طول ضرب عرض می‌باشد، در فارمول قیمت متوسط $f(c)$ عرض مستطیل و $b-a$ طول مستطیل است. بنابراین مساحت تحت منحنی در انتروال $[1,4]$ مساوی با مساحت مستطیلی است که اضلاع آن 7 و 3 می‌باشد.



1- انتیگرال‌های معین زیر را محاسبه کنید.

$$a) \int_{-1}^1 (x^3 + 2) dx = ?$$

$$e) \int_{-2}^3 3x dx = ?$$

$$b) \int_2^5 7x dx = ?$$

$$f) \int_{-1}^2 \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4\right) dx = ?$$

$$c) \int_{-2}^4 (-x) dx = ?$$

$$g) \int_{-4}^4 \left(2x^2 - \frac{1}{8}x^4\right) dx = ?$$

$$d) \int_1^3 \sqrt{x} dx = ?$$

2- قیمت انتیگرال $\int_{-1}^4 f(x) dx$ را در انتروال $[-1,4]$ دریابید اگر $\int_{-1}^1 f(x) dx = 5$ و

$$\int_1^4 f(x) dx = -2 \text{ باشد.}$$

3- تابع $f(x) = x$ را در انتروال $[0,2]$ در نظر گرفته و از آن قیمت c را دریابید.

قضایای اساسی مشتق و انتیگرال

یک موتور با سرعت $72 \frac{m}{sec}$ در حال حرکت

است. راننده آن برک را فشار می‌دهد و موتور

بعد از 6 ثانیه توقف می‌کند. فاصله طی شده در

این مدت را دریابید؟

$$S(t) = v_0 \cdot t$$



فعالیت

• با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = x^2$ را در نقطه $h = 0$ به دست آرید.

• انتیگرال مشتق به دست آمده را محاسبه کنید.

• قیمت به دست آمده را با تابع اولی مقایسه کنید.

از فعالیت فوق نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

بین مشتق و انتیگرال یک ارتباط منطقی وجود دارد که با استفاده از این ارتباط می‌توان قضایای اصلی و اساسی مشتق و انتیگرال را به طور زیر به اثبات رسانید:

1- قضیه اول اساسی مشتق و انتیگرال:

اگر تابع $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ متمادی و x در این انتروال شامل باشد، داریم: $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

چون تابع $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ مشتق پذیر است، پس برای هر $x \in [a, b]$ ، $F'(x) = f(x)$ می‌باشد.

ثبوت: چون تابع $f(x)$ در انتروال $x \in [a, b]$ متمادی است؛ تابع f در انتروال $[a, x]$ نیز متمادی می‌باشد و در نتیجه، تابع $f(x)$ در این انتروال انتیگرال پذیر است.

حال مشتق تابع $F(x)$ را طبق تعریف، نوشته و متحول x را به اندازه h تزايد داده، داریم که:

$$F'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(a) + F(a) - F(x)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(a) - (F(x) - F(a))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x)|_a^{x+h} - F(x)|_a^x}{h}$$

اکنون $f(x)$ را با $f(t)$ عوض می‌کنیم:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t) \Big|_a^{x+h} - F(t) \Big|_a^x}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h}$$

نظر به خاصیت سوم داریم که: $\int_a^b f(t) dt = -\int_b^a f(t) dt$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h}$$

اما بنابر قضیه قیمت متوسط $f(c) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$ است که c بین x و $x+h$ قرار دارد؛ پس وقتی که h به طرف صفر تقرب کند، c به x تقرب می‌کند و به دلیل متمادیت تابع $f(x)$ داریم:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x)$$

در نتیجه: $F'(x) = f(x)$ می‌باشد.

مثال: مشتق $F(x) = \int_2^{x^2+1} \frac{1}{t^2+1} dt$ را بیابید.

حل:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{یا} \quad F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt$$

$$u = g(x) = x^2 + 1$$

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$$

$$F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

نظر به قاعده زنجیری داریم:

$$F'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2 + 1} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{1}{(x^2 + 1)^2 + 1} \cdot 2x$$

$$F'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2 + 1}$$

2- قضیه دوم اساسی مشتق و انتگرال:

اگر تابع $F(x)$ تابع اولیه $f(x)$ در انتروال بسته $[a, b]$ و متمادی باشد، در این صورت داریم که:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

ثبوت: نظر به قضیه قبلی می‌دانیم که اگر $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ باشد، برای هر

$F'(x) = f(x)$ ، $x \in [a, b]$ است، پس خلاف این دو مقدار مقدار ثابتی وجود دارد که:

$$f(x) - F'(x) = k \Rightarrow f(x) = F'(x) + k$$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^x f(t) dt = f(x) = F'(x) + k$$

$$\int_a^x f(t) dt - F(x) = k$$

اگر به جای x در رابطه فوق a را وضع کنیم:

$$\int_a^a f(t) dt - F(a) = k, \quad 0 - F(a) = k \Rightarrow k = -F(a)$$

قیمت k را در رابطه اولی وضع می‌کنیم:

$$\int_a^x f(t) dt - F(x) = -F(a)$$

اگر به جای x در این رابطه b را وضع کنیم:

$$\int_a^b f(t) dt - F(b) = -F(a)$$

که آنرا به صورت $\int_a^b f(t) dt = [F(x)]_a^b$ نیز نمایش می‌دهند.

یادداشت

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + c$$

رابطهٔ اخیر، ارتباط بین تابع اولیهٔ F و انتگرال معین $\int_a^b f(t) \, dt$ را بیان می‌کند که به نام رابطهٔ نیوتن-لایبنیتز معروف است.

مثال: حاصل $\int_0^1 x^2 \, dx$ را به دست آرید.

حل:

$$\int_0^1 x^2 \, dx = F(1) - F(0) = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

تمرین

1- مشتق‌های زیر را پیدا کنید.

a) $F(t) = \int_{\sin t}^{\cos t} \frac{1}{4-x^2} \, dx$

b) $F(t) = \int_0^{\cos t} \frac{1}{4-x^2} \, dx$

c) $F(t) = \int_{-\pi}^t \frac{\cos y}{1+y^2} \, dy$

d) $F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} \, dt$

2- اگر در تابع $f(t) = t$ ، $F(0) = 2$ باشد، مقدار $F(b)$ را در نقاط $b = 1, \dots, 0.4, 0.2, 0$ پیدا کنید.

3- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$ را پیدا کنید.

انتیگرال گیری به طریقه تعویض

- آیا می توانید انتیگرال مقابل را با استفاده از خواص انتیگرال های غیر معین حل کنید؟

$$\int 2x\sqrt{1+x^2} dx$$

- اگر پاسخ منفی است، در این صورت افاده تحت جذر را با یک متحول دیگر تعویض و آنرا حساب کنید و بگویید که این طریقه تعویض کردن در انتیگرال ها را به نام چه یاد می کنند؟



فعالیت

- در انتیگرال $\int_0^4 \sqrt{2x+1} dx$ افاده تحت جذر را مساوی با متحول u قرار دهید.
 - از u مشتق گرفته و قیمت dx را دریابید.
 - چون انتیگرال فوق یک انتیگرال معین است، پس در معادله $u = 2x+1$ قیمت های $x=0$ و $x=4$ را وضع و سرحدات را از جنس u دریابید و بعداً قیمت انتیگرال را حساب کنید.
- از فعالیت فوق به این نتیجه می رسیم که:
- اگر تابع $f(x)$ در انتروال بسته $[a, b]$ مشتق پذیر باشد، $u = g(x)$ و $F' = f$ تعویض گردد.
- چون $du = g'(x) dx$ است، توسط قاعده زنجیری می نویسیم که:

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

مثال 1: انتیگرال $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ را حساب کنید.

حل: افاده داخل قوس را با u تعویض می‌کنیم:

$$u = 3 - 5x, \quad du = -5 dx \quad dx = -\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 3 - 5x \Rightarrow u = 3 - 5 \cdot 1 = -2 \Rightarrow u = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ u = 3 - 5x \Rightarrow u = 3 - 5 \cdot 2 = 3 - 10 \Rightarrow u = -7 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2} \left(-\frac{1}{5}\right) du = -\frac{1}{5} \int_{-2}^{-7} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5} \left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \left[\frac{1}{5u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5} \left[-\frac{1}{7} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{14}$$

مثال 2: انتیگرال $\int_0^1 x^2 (1+2x^3)^5 dx$ را محاسبه کنید.

حل: افاده داخل قوس را به u تعویض می‌کنیم:

$$u = 1 + 2x^3, \quad du = 6x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{6} du$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = 1 + 2x^3 \Rightarrow u = 1 + 2 \cdot 0 = 1 \Rightarrow u = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 1 + 2x^3 \Rightarrow u = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \Rightarrow u = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 (1+2x^3)^5 dx &= \int_1^3 u^5 \frac{1}{6} \cdot du = \frac{1}{6} \int_1^3 u^5 du = \frac{1}{6} \left[\frac{u^6}{6}\right]_1^3 = \frac{1}{6} \left[\frac{3^6}{6} - \frac{1}{6}\right] \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{729}{6} - \frac{1}{6}\right] = \frac{1}{6} \left[\frac{728}{6}\right] \\ &= \frac{728}{36} = \frac{182}{9} = 20.\bar{2} \end{aligned}$$



فعالیت

- افاده تحت جذر انتیگرال $\int x^2 \sqrt{x^3+1} dx$ را با متحول u تعویض کنید.
- از u مشتق گرفته، قیمت دریافت شده را در انتیگرال اولی گذاشته و آنرا حساب کنید.
- از $F(x) + C$ تابع به دست آمده فوق مشتق گرفته و تابع اولی را به دست آرید.

از فعالیت فوق نتیجه زیر به دست می آید:

اگر تابع $F(u)$ تابع اولی $f(u)$ باشد، با تعویض متحول $u = g(x)$ به یک تابع از متحول مستقل x که مشتق متمادی دارد؛ با استفاده از قاعده زنجیری خواهیم داشت:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

مثال 1: انتیگرا $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$ را حساب کنید.

حل: ابتدا افاده تحت جذر را با u عوض می کنیم:

$$u = 1 - 4x^2, du = -8x dx$$

$$x dx = -\frac{1}{8} du$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{u}} \left(-\frac{1}{8}\right) du = -\frac{1}{8} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = -\frac{1}{8} \int u^{-\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{8} \left(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right) + C \\ &= -\frac{1}{8} \left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) + C = -\frac{1}{8} \left(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}} \right) + C = -\frac{1}{8} (2\sqrt{u}) + C = -\frac{1}{4} \sqrt{1-4x^2} + C \end{aligned}$$

مثال 2: $\int x^3 \cos(x^4 + 2) dx$ را محاسبه کنید.

حل: اگر $u = x^4 + 2$ را وضع کنیم، این نتیجه به دست می آید:

$$u = x^4 + 2, du = 4x^3 dx, x^3 dx = \frac{1}{4} du$$

$$\begin{aligned} \int x^3 \cos(x^4 + 2) dx &= \int \cos u \cdot \frac{1}{4} du \\ &= \frac{1}{4} \int \cos u du \\ &= \frac{1}{4} \sin u + C \\ &= \frac{1}{4} \sin(x^4 + 2) + C \end{aligned}$$



انتگرال‌های زیر را با روش تعویضی محاسبه کنید:

a) $\int \cos 3x \, dx = ?$

b) $\int_1^2 x\sqrt{x-1} \, dx = ?$

c) $\int_0^7 \sqrt{4+3x} \, dx = ?$

d) $\int 2 \sqrt[5]{(1-4x)^2} \, dx = ?$

e) $\int 2x(x^2+3)^4 \, dx = ?$

f) $\int_0^5 \frac{x \, dx}{x^2+10} = ?$

g) $\int \sqrt{\cos x} \sin x \, dx = ?$

انتگرال‌های قسمی

- در وقت تقسیمات حجروی، یک حجره به دو یا چندین حجره دیگر تقسیم می‌شود. آیا می‌توان این روش را در دیگر اشیاء مثل سنگ، ریگ و غیره مشاهده کرد؟

- اگر پاسخ مثبت است این روش را به نام چه یاد می‌کنند؟



• انتگرال $\int \frac{x dx}{x^2 + 1}$ را با روش تعویضی حل کنید.

• انتگرال $\int_{-1}^1 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$ را با روش تعویضی بیابید.

• آیا می‌توان $\int x^2 \sin x dx$ را با روش تعویضی حل کرد؟

از فعالیت فوق به این نتیجه می‌رسیم که:

در انتگرال $\int f(x)g(x)dx$ ، $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق‌پذیر اند؛ ولی محاسبه انتگرال آنها کار ساده‌یی نیست. اگر $f(x) = u$ و $g(x) = v$ را قرار دهیم، حاصل ضرب مشتق آنها

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u \quad \text{مساویست با:}$$

از رابطه فوق $v' \cdot u$ را به دست آورده و اطراف را انتگرال می‌گیریم:

$$v' \cdot u = (u \cdot v)' - u' \cdot v$$

$$\int v' \cdot u dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx \quad \text{یا} \quad \int u dv = u \cdot v - \int v du$$

رابطه اخیر را «فارمول انتگرال غیر معین به روش قسمی» می‌گویند.

اگر توابع u و v در بین انتروال $[a, b]$ تعریف شده باشند فارمول زیر به نام «فارمول انتگرال معین به روش قسمی» یاد می‌گردد.

$$\int_a^b v' u dx = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v u' dx \quad \text{یا} \quad \int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

مثال 1: انتیگرال $\int x \sin x \, dx$ را پیدا کنید.

حل:

$$u = x, \quad du = dx$$

$$dv = \sin x \, dx, \quad v = -\cos x$$

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= x(-\cos x) - \int -\cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

مثال 2: انتیگرال $\int_0^1 -x e^x \, dx$ را حساب کنید.

حل:

$$u = -x, \quad du = -dx, \quad -du = dx$$

$$dv = e^x \, dx, \quad v = e^x$$

$$\int_a^b v' \cdot u \, dx = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot u' \, dx$$

$$\int_0^1 -x e^x \, dx = [-x e^x]_0^1 + \int_0^1 e^x \, dx$$

$$= -e^1 + 0 \cdot e^0 + [e^x]_0^1$$

$$= -e^1 + e^1 - e^0 = -e^0$$

$$= -1$$

یادداشت

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

تمرین

انتیگرال‌های زیر را حساب کنید:

a) $\int \theta \cos \theta \, d\theta = ?$

c) $\int x^5 \cos(x^3) \, dx = ?$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x \, dx = ?$

d) $\int_0^1 x e^x \, dx = ?$

نکات مهم فصل

مجموع ریمان: فرض کنیم تابع $y = f(x)$ در انتروال بسته $[a, b]$ متمادی تعریف شده است، اگر بخواهیم مساحت ناحیه A واقع بین محور x و منحنی تابع $y = f(x)$ را که قابل تبدیل به اشکال هندسی نیست محاسبه کنیم:

انتروال بسته $[a, b]$ را به n مستطیل‌ها تقسیم می‌کنیم، طوری که عرض مستطیل‌ها از رابطه $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ به دست می‌آید و طول این مستطیل‌ها عبارت از قیمت تابع در همان نقطه است. طول هر انتروال این مستطیل‌ها برای $i = 1, 2, \dots, n$ قرار زیر است:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \dots, x_i = a + i\Delta x, \dots, x_n = b$$

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

اگر مساحت‌های مستطیل‌های تحتانی را به $f(x_{i-1})\Delta x$ و مساحت‌های مستطیل‌های فوقانی را به

$$f(x_i)\Delta x \quad \text{و مساحت محصور شده را به } A \text{ نشان دهیم داریم: } \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

انتیگرال غیرمعین: هرگاه تابع $f(x)$ در انتروال بسته $[a, b]$ تعریف و $F(x)$ یک تابع اولیه از

$f(x)$ باشد، ست توابع $F(x) + C$ را در حالی که C یک عدد ثابت اختیاری است، به نام

انتیگرال غیر معین از $f(x)$ یاد می‌کند و می‌نویسند:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

خواص انتیگرال غیرمعین:

$$\int k dx = k \int dx = kx + C$$

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx$$

$$\int [f(x) \cdot g(x)] dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx \neq \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx}, \quad g(x) \neq 0$$

انتیگرال معین: لیمت مجموع ریمان تابع $f(x)$ در انتروال بسته $[a, b]$ وقتی که عدد n به بی‌نهایت تقرب کند و بزرگ‌ترین طول انتروال‌های فرعی (Δx) به صفر نزدیک گردد، به نام انتیگرال معین تابع $f(x)$ از $x = a$ تا $x = b$ یاد می‌شود؛ یعنی:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

که در اینجا a را سرحد پایینی و b را سرحد بالایی انتیگرال گویند.

خواص انتیگرال معین:

$$\int_a^b C dx = C(b-a)$$

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a) \Rightarrow f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

1- **قضیه اول اساسی مشتق و انتیگرا:** اگر تابع f در انتروال $[a, b]$ متمادی و x در این انتروال شامل باشد، داریم:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

چون تابع f در انتروال $[a, b]$ مشتق پذیر است پس برای هر $x \in [a, b]$ ، $F'(x) = f(x)$ می باشد.

2- **قضیه دوم اساسی مشتق و انتیگرا:** اگر تابع $F(t)$ تابع اولیه $f(t)$ در انتروال $[a, b]$ متمادی باشد، در این صورت داریم که:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

• اگر تابع $F(u)$ تابع اولی $f(u)$ باشد، با تعویض متحول $u = g(x)$ به یک تابع از متحول مستقل x که مشتق متمادی دارد؛ با استفاده از قاعده زنجیری خواهیم داشت:

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du$$

• اگر تابع $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ مشتق پذیر باشد، $u = g(x)$ و $F' = f$ تعویض می گردد. چون $du = g'(x) dx$ است، توسط قاعده زنجیری می نویسیم که:

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

• در انتیگرا $\int f(x) g(x) dx$ ، $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق پذیر اند؛ ولی محاسبه انتیگرا آنها کار ساده‌ی نیست اگر $f(x) = u$ و $g(x) = v$ را قرار دهیم، حاصل ضرب مشتق آنها مساویست با:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

از رابطه فوق $v' \cdot u$ را به دست آورده و اطراف را انتیگرا می گیریم:

$$\int v' \cdot u dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx \quad \text{یا} \quad \int u dv = u \cdot v - \int v du$$

رابطه اخیر را به نام فارمول انتیگرا ل غیر معین به روش قسمی یاد می کنند.

- اگر توابع u و v در انتروال $[a, b]$ تعریف شده باشند، فارمول زیر به نام «فارمول انتیگرا ل معین به روش قسمی» یاد می گردد:

$$\int_a^b v' u \, dx = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v u' \, dx \quad \text{یا} \quad \int_a^b u \, dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \, du$$

تمرینات عمومی فصل چهارم

1- حاصل انتیگرال‌های معین زیر را به دست آرید:

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$b) \int_{-4}^4 [2x^2 - \frac{1}{8}x^4] dx$$

$$c) \int_2^4 \frac{1}{x^2} dx$$

$$d) \int_0^3 4dx$$

$$e) \int_1^3 \sqrt{x} dx$$

$$f) \int_1^2 (x^2 - x^5) dx$$

$$g) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$h) \int_{-2}^0 [\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3}] dx$$

$$i) \int_2^3 (x^3 + x^2) dx$$

$$j) \int_{-2}^2 [x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4] dx$$

$$k) \int_0^{\pi} \sin x dx$$

$$l) \int_1^2 x^2 dx$$

2- قیمت انتیگرال‌های غیر معین زیر را محاسبه کنید:

$$a) \int [\sin x + 8x^3] dx$$

$$g) \int \sqrt[5]{x^3} dx$$

$$b) \int [x^5 + \frac{4}{x^4} + x^3 + \frac{2}{x^2} + x] dx$$

$$h) \int \frac{3x^2 + 8x}{x} dx$$

$$c) \int x(1 - 2x^2) dx$$

$$i) \int (2x^2 + 3) dx$$

$$d) \int \sin x dx$$

$$j) \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 2}} dx$$

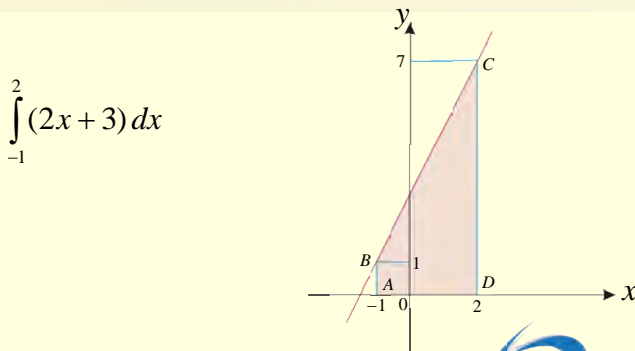
$$e) \int \frac{\sin 2x}{2 \sin x} dx$$

$$k) \int \frac{(1+x)(1-x)}{x - x^3} dx$$

$$f) \int \frac{(1-x)^2}{1-x} dx$$

$$l) \int (3x^2 + 4x - 1) dx$$

3- مساحت محصور شده انتیگرال زیر را با استفاده از شکل حساب کنید:



$$\int_{-1}^2 (2x + 3) dx$$

4- انتیگرال‌های زیر را با استفاده از روش تعویضی دریابید:

$$a) \int 3 \cos(2x+1) dx$$

$$g) \int_0^2 \frac{dt}{(3-2t)^2}$$

$$b) \int \sqrt{3x+5} dx$$

$$h) \int_0^2 x^2 \sqrt{9-x^3} dx$$

$$c) \int \frac{2 dx}{x+2}$$

$$i) \int \frac{1}{(x-10)^7} dx$$

$$d) \int (3x+6)^3 dx$$

$$j) \int_0^1 (1-x^2)^3 x dx$$

$$e) \int x^3 \sqrt{x^4+2} dx$$

$$k) \int (4-3x)^7 dx$$

$$f) \int (x^3+2)^2 3x^2 dx$$

$$l) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}$$

5- انتیگرال‌های زیر را با استفاده از روش قسمی حل کنید:

$$a) \int x \cos x dx$$

$$f) \int x \sqrt{1+x} dx$$

$$b) \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx$$

$$g) \int x^2 \cdot e^{2x} dx$$

$$c) \int e^x \cdot \cos x dx$$

$$h) \int e^{2x} \sin 3x dx$$

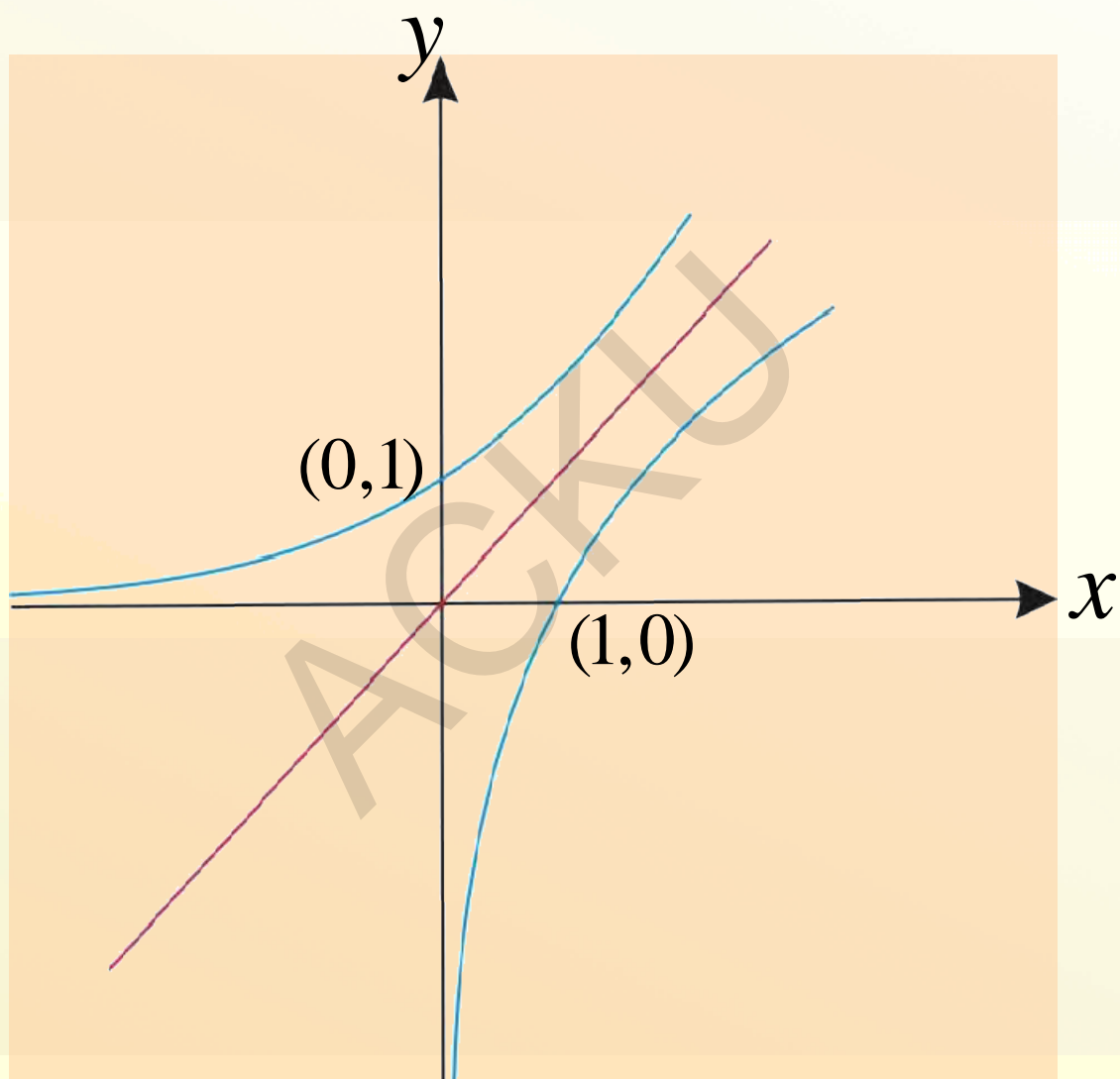
$$d) \int_0^{2\pi} x \cos 3x dx$$

$$i) \int x^2 \cdot e^{-x} dx$$

$$e) \int x e^{-x} dx$$

فصل پنجم

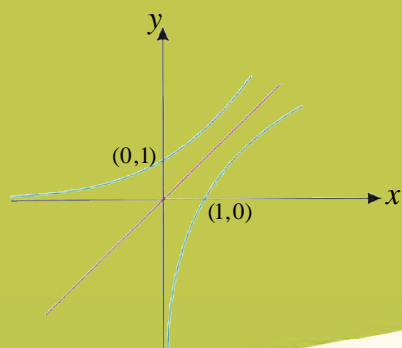
مشتق و انتیگرال توابع لوگاریتمی و
اکسپوننشیل



مشتق توابع اکسپوننشیل و لوگاریتمی

شکل مقابل، گراف کدام نوع از توابع را نشان

می دهد؟



فعالیت

- لوگاریتم را تعریف کنید و خواص آنرا بنویسید؟
 - توابع لوگاریتمی و اکسپوننشیل (نمایی) با هم چه رابطه‌ی دارند؟
 - هرگاه $\log_b x$ یک تابع متصل باشد $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ مساوی با کدام عدد است؟
 - لوگاریتم طبیعی را از هر دو طرف تابع $y = f(x)$ اخذ کرده و رابطه آنرا بنویسید؟
- نتیجه فعالیت فوق را به طور زیر بیان می‌نماییم:

بصورت عموم، اگر $f(x) = \ln x$ و $g(x) = a^x$ باشد؛ پس $g'(x) = a^x \ln a$ و $f'(x) = \frac{1}{x}$ است.

ثبوت:

-1

$$y = g(x) = a^x$$

$$\ln y \quad \ln a^x = x \ln a$$

از دو طرف مساوات، نظر به x مشتق می‌گیریم:

$$\frac{y'}{y} = x' \ln a + x(\ln a)'$$

$$\frac{y'}{y} = \ln a + 0$$

$$\frac{1}{y} y' = \ln a$$

$$y' = y \ln a \Rightarrow g'(x) = a^x \ln a$$

$$f(x) = \ln x$$

$$(\ln x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h}$$

$$\begin{aligned} (\ln x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \end{aligned}$$

اگر $u = \frac{x}{h}$ وضع گردد، $\frac{h}{x} = \frac{1}{u}$ می شود. از آنجا که $h \rightarrow 0$ تقریب می کند، $u \rightarrow \infty$ نزدیک می گردد. پس می توانیم بنویسیم که:

$$\begin{aligned} (\ln x)' &= \frac{1}{x} \lim_{u \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x} \ln \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u \\ &\text{می دانیم که } \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e \text{ است؛ پس: } (\ln x)' = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} \text{ می شود.} \end{aligned}$$

قضیه

1- اگر تابع $f(x) = \log_a x$ مشتق پذیر باشد؛ پس مشتق آن عبارت از $f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$ است.

2- اگر $f(x) = \log_a g(x)$ و $g(x)$ مشتق پذیر باشد؛ پس: $(\log_a g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)} \log_a e$ است.

ثبوت:

-1

$$f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

حالا اگر $u = \frac{x}{h}$ وضع گردد، پس $\frac{h}{x} = \frac{1}{u}$ می گردد که اگر $h \rightarrow 0$ پس $u \rightarrow \infty$ می کند؛ یعنی:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$(\log_a g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)} \log_a e \quad 2- \text{می‌خواهیم ثبوت نماییم که:}$$

نظر به قاعدهٔ زنجیری داریم که:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\log_a g(x))' = (\log_a g(x))' \cdot g'(x) = \frac{1}{g(x)} \log_a e \cdot g'(x) \\ &= \frac{g'(x)}{g(x)} \log_a e \end{aligned}$$

$$(\log_a g(x))' = (\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)} \quad \text{اگر } a = e \text{ وضع شود، داریم که:}$$

نتیجه

1- مشتق توابع *Exponential* را با استفاده از لوگاریتم به آسانی به دست آورده می‌توانیم:

اگر $y = e^x$ باشد، مشتق این تابع $y' = e^x$ است؛ زیرا اگر از هر دو طرف رابطه $y = e^x$ لوگاریتم طبیعی بگیریم، به دست می‌آید که:

$$y = e^x \Rightarrow \ln y = x \ln e = x$$

$$(\ln y)' = (x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \Rightarrow y' = y \cdot 1 = e^x$$

2- اگر $y = e^u$ باشد و u تابع x باشد، پس داریم که: $y' = u' e^x$

3- اگر $y = a^u$ و $a \neq 1$ باشد، پس داریم که: $y' = u' a^u \ln a$

4- برای پیدا کردن مشتق توابع لوگاریتمی به قاعده‌های مختلف، می‌توانیم از رابطهٔ زیر استفاده نماییم:

$$y = \log_a u \Rightarrow y' = (\log_a u)' = \frac{u'}{u} \log_a e$$

$$y' = \frac{u'}{u} \log_a e = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\log_e a} \Rightarrow y' = \frac{(\ln u)'}{\ln a} = \frac{u'}{u \ln a}$$

مثال 1: مشتق تابع $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ را دریابید.

حل: اگر $g(x) = x^2 + 1$ وضع گردد، داریم که:

$$g(x) = x^2 + 1$$

$$g'(x) = 2x$$

$$(\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$(\ln(x^2 + 1))' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \Rightarrow f'(x) = (\ln(x^2 + 1))' = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

مثال 2: مشتق تابع $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 4)$ را دریابید.

حل:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \ln(x^2 - 5x + 4) \\ g(x) = x^2 - 5x + 4 \Rightarrow g'(x) = 2x - 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)} \\ (\ln(x^2 - 5x + 4))' = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 4} \end{array}$$

مثال 3: مشتق توابع $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$ و $f(x) = \log_a \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$ را دریابید.

حل: می‌دانیم که $\log_a \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}} = \log_a \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}}$ است، پس می‌توانیم بنویسیم که:

$$\log_a \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}} = \log_a \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_a \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} (\log_a (x^2 + 1) - \log_a (x^2 - 1))$$

$$\begin{aligned} (\log_a \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}})' &= \frac{1}{2} (\log_a (x^2 + 1) - \log_a (x^2 - 1))' \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)} \log_a e - \frac{(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)} \log_a e \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2x}{x^2 + 1} \log_a e - \frac{2x}{x^2 - 1} \log_a e \right] = \frac{1}{2} \cdot 2x \log_a e \left[\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 - 1} \right] \\ &= \frac{-2x}{x^4 - 1} \log_a e \end{aligned}$$

حل: می‌دانیم که $\ln \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}} = \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}}$ است، پس می‌توانیم بنویسیم که:

$$\ln \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}} = \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 - 1))$$

$$\begin{aligned} (\ln \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}})' &= \frac{1}{2} [\ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 - 1)]' = \frac{1}{2} [(\ln(x^2 + 1))' - (\ln(x^2 - 1))'] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{2x}{x^2 - 1} \right) = \frac{-2x}{x^4 - 1} \end{aligned}$$

مثال 4- مشتق تابع $y = e^{(x^2+1)}$ را دریافت کنید.

حل: می‌دانیم که اگر $y = e^u$ باشد پس: $y' = u' e^u$ است.

$$y = e^{(x^2+1)} \Rightarrow y' = (x^2 + 1)' \cdot e^{x^2+1} = 2x \cdot e^{x^2+1}$$

مثال 5- مشتق تابع $y = \sqrt[3]{2}$ را به دست آرید:

حل: می‌دانیم که اگر $y = a^u$ باشد، $y' = u' a^u \ln a$ و $u = \frac{1}{x}$ است، بنابراین:

$$y = \sqrt[3]{2} = (2)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow y' = \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot 2^{\frac{1}{x}} \ln 2 = \frac{-1}{x^2} \cdot 2^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 2$$

مثال 6: مشتق تابع $y = x^{2x}$ را دریابید.

حل: اگر از اطراف معادله لوگاریتم طبیعی بگیریم، داریم که:

$$y = x^{2x}$$

$$\ln y = \ln x^{2x}$$

$$\ln y = 2x \ln x$$

$$(\ln y)' = (2x \ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = 2(\ln x + 1) \cdot y \Rightarrow y' = 2(\ln x + 1) \cdot x^{2x}$$

مثال 7: مشتق تابع $y = 10^x$ را دریابید.

حل: می‌دانیم $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a$ است؛ پس:

$$y = 10^x$$

$$y' = 10^x \cdot \ln 10$$

مثال 8: مشتق تابع $y = e^{3x}$ را دریابید.

حل: اگر $u = 3x$ وضع گردد، داریم که: $u' = 3$

$$y = e^u$$

$$y' = e^u \cdot u' = e^{3x} \cdot 3$$

$$y' = 3e^{3x}$$

مثال 9: مشتق توابع زیر را به دست آرید.

1) $y = \log(x^4 + 1)$

2) $y = \log_3(\log_2 x)$

3) $y = \log_{x^2-1} x^2 + 1$

حل: می‌دانیم که مشتق توابع لوگاریتمی به قاعده‌های مختلف با استفاده از قضیه زیر به دست می‌آید:

$$y = \log_a u$$

$$y' = (\log_a u)' = \frac{u'}{u} \log_a e = \frac{u'}{u \log_e a} = \frac{u'}{u \ln a}$$

$$1) \ y = \log(x^4 + 1) \Rightarrow y' = \frac{4x^3}{(x^4 + 1) \ln 10}$$

$$\begin{aligned} 2) \ y = \log_3(\log_2 x) &\Rightarrow y' = \frac{(\log_2 x)'}{\ln 3 \log_2 x} = \frac{\frac{1}{x \ln 2}}{\ln 3 \log_2 x} = \frac{1}{(\ln 2)(\ln 3)x \log_2 x} \\ &= \frac{1}{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot x \cdot \frac{\log_e x}{\log_e 2}} = \frac{1}{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot x \cdot \frac{\ln x}{\ln 2}} = \frac{1}{\ln 3 x \ln x} \end{aligned}$$

$$3) \ y = \log_{x^2-1} x^2 + 1 = \frac{\log_e(x^2 + 1)}{\log_e(x^2 - 1)} = \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(x^2 - 1)}$$

میدانیم که $y = \frac{u}{v}$ است؛ پس داریم که:

$$y' = \frac{\frac{2x}{x^2+1} \cdot \ln(x^2-1) - \frac{2x}{x^2-1} \ln(x^2+1)}{[\ln(x^2-1)]^2}$$

تمرین

مشتق توابع زیر را دریابید.

$$a) \ f(x) = \ln \sin 3x$$

$$b) \ f(x) = \ln \sqrt{3x^2 + 7}$$

$$c) \ f(x) = \ln(5x^2 - 6x + 5)$$

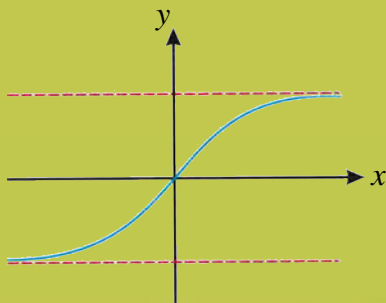
$$d) \ f(x) = \log_{10} 3x^2$$

$$e) \ f(x) = y = x^x$$

$$f) \ y = \frac{(x+1)^2(\sqrt{x-1})}{(x+4)^3 e^x}$$

مشتق توابع معکوس

شکل مقابل چه نوع تابعی را نشان می‌دهد؟



هرگاه f و g دو تابع معکوس همدیگر باشند؛ یعنی $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ درین صورت

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) \\ x = g(y) \end{array} \right\} \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = y'_y \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = 1 \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

مثال: مشتق تابع $y = a^x$ را با استفاده از مشتق تابع معکوس آن به دست آرید.

حل:

$$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y} \log_a e} = \frac{1}{\frac{1}{y}} \log_e a = y \log_e a$$

$$y' = a^x \ln a$$

مشتق توابع معکوس مثلثاتی

مشتق توابع معکوس مثلثاتی را با استفاده از رابطه‌های زیر به دست می‌آوریم:

$$1) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$2) (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$3) (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$4) (\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

ثبوت:

$$1) y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

$$(\arcsin x)' = ?$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$2) y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$$

$$(\arccos x)' = ?$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$3) y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$

$$= \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

صورت و مخرج را تقسیم می کنیم:

$$(\arctan x)' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$4) y = \operatorname{arc} \cot x \Leftrightarrow x = \cot y$$

$$(\operatorname{arc} \cot x)' = ?$$

$$(\operatorname{arc} \cot x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 y}}$$

$$= -\sin^2 y = \frac{-\sin^2 y}{1} = \frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

صورت و مخرج را تقسیم می‌کنیم:

$$= -\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{-1}{1 + \cot^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

مثال 1: مشتق تابع $y = (\arctan x)^5$ را به دست آرید.

حل:

$$y' = 5(\arctan x)^4 (\arctan x)' = 5(\arctan x)^4 \frac{1}{1+x^2}$$

مثال 2: مشتق تابع $y = \log_5(\arctan x)$ را به دست آرید.

حل: اگر $\arctan x = u$ وضع گردد داریم که:

$$y' = [\log_5(\arctan x)]' = (\log_5 u)' = \frac{u'}{u \ln 5}$$

$$= \frac{1}{\arctan x \ln 5} = \frac{1}{(1+x^2)(\arctan x \ln 5)}$$

مثال 3: قیمت مشتق تابع $y = \arctan e^x$ را در نقطه $x = 0$ پیدا کنید.

حل: اگر $e^x = u$ باشد، پس $u' = e^x$ است:

$$y' = [\arctan e^x]' = (\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$y'(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$



تمرین

مشتق توابع زیر را دریابید.

1) $y = (\arcsin x)^3$

2) $y = \log_2(\arccos x)$

ACKU

کسور قسمی

تجزیه یک کسر به کسور قسمی:

$$\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{2x-1}{x^2-1}$$

می‌دانیم که حاصل جمع کسرهای $\frac{1}{x^2-1}$ و $\frac{2}{x+1}$ مساوی با $\frac{2x-1}{x^2-1}$ است. آیا می‌توانید از این کسر دوباره کسرهای $\frac{1}{x^2-1}$ و $\frac{2}{x+1}$ را به دست آرید؟



- کسرهای $\frac{7}{x+1}$ ، $\frac{5}{x-2}$ و $\frac{2}{x-5}$ را با هم جمع نمایید.
 - حاصل جمع کسرهای فوق را دوباره به کسرهای اولیه تجزیه کنید.
 - کسرهای واقعی چه نوع کسرهایی اند، آن را تعریف نمایید.
- نتیجه فعالیت فوق را چنین بیان می‌کنیم:

تعریف: کسرهای کوچک یک کسر واقعی که به شکل حاصل جمع نوشته شده باشد، طوری که اگر آنها با هم جمع گردند، کسر داده شده واقعی به دست آید، کسور قسمی نامیده می‌شود. برای تجزیه یک کسر واقعی، حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول:

هرگاه در $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ پولینوم مخرج $P_n(x)$ از عوامل ضربی‌یی که تکرار نشده، تشکیل گردیده باشد، می‌توان آن را همانند الگوی مقابل تجزیه کرد:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} + \dots + \frac{N}{x-x_n}$$

(A, B, C, \dots اعداد حقیقی اند)

مثال 1: کسر $\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$ را به کسور قسمی آن تجزیه نمایید.

حل: پولینوم مخرج را به عوامل ضربی اولیه آن تجزیه نموده، داریم:

$$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x-5)(x-1)(x+2)$$

به مشاهده می‌رسد که کسر فوق‌الذکر از سه کسر تشکیل گردیده است اگر صورت‌های آن را C, B, A انتخاب نماییم، داریم که:

$$\begin{aligned}\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} &= \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} \\ &= \frac{A(x-1)(x+2) + B(x-5)(x+2) + C(x-1)(x-5)}{(x-5)(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 - 3Bx - 10B + Cx^2 - 6Cx + 5C}{(x-5)(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (A-3B-6C)x + (-2A-10B+5C)}{(x-5)(x-1)(x+2)}\end{aligned}$$

دیده می‌شود که مخرج‌ها با هم مساوی اند، بناءً صورت‌ها نیز با هم مساوی می‌باشند. با استفاده از خواص مطابقت (ضریب‌های حدود مشابه با هم مساوی اند) می‌توانیم بنویسیم که:

$$\begin{cases} A + B + C = 4 \\ A - 3B - 6C = -1 \\ -2A - 10B + 5C = -39 \end{cases}$$

از حل سیستم معادلات فوق $A = 2$, $B = 3$, و $C = -1$ به دست می‌آید؛ پس:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{2}{x-5} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

مثال 2: کسر $\frac{3x^3 - 6x^2 - 20x - 1}{x^2 - 2x - 8}$ را به کسور اولیه آن تجزیه نمایید.

حل: ابتدا کسر فوق‌الذکر را به کسر واقعی تبدیل و بعداً طریقه فوق را بالای آن تطبیق می‌نماییم:

$$\begin{aligned}\frac{3x^3 - 6x^2 - 20x - 1}{x^2 - 2x - 8} &= 3x + \frac{4x-1}{x^2-2x-8} \Rightarrow \frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2} \\ &= \frac{A(x+2) + B(x-4)}{(x-4)(x+2)} = \frac{(A+B)x + (2A-4B)}{x^2-2x-8}\end{aligned}$$

$$\left. \begin{matrix} A + B = 4 \\ 2A - 4B = -1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow A = \frac{5}{2}, \quad B = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3x^3 - 6x^2 - 20x - 1}{x^2 - 2x - 8} = 3x + \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

حالت دوم:

هرگاه بعضی از عوامل ضربی مخرج پولینوم درجه یک تکرار گردیده باشد یعنی اگر عامل $x - x_0$ ، n دفعه تکرار گردیده باشد، می توانیم بنویسیم که:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x - x_0} + \frac{B}{(x - x_0)^2} + \dots + \frac{N}{(x - x_0)^n}$$

مثال 1: کسر واقعی $\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$ را به کسرهای قسمی آن تجزیه کنید.

حل: عوامل ضربی پولینوم مخرج را به دست می آوریم:

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)(x - 2)(x - 1)$$

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} &= \frac{3x^2 - 6x + 2}{(x - 2)(x - 1)^2} = \frac{A}{(x - 2)} + \frac{B}{(x - 1)} + \frac{C}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{A(x - 1)^2 + B(x - 2)(x - 1) + C(x - 2)}{(x - 2)(x - 1)^2} \\ &= \frac{(A + B)x^2 + (-2A - 3B + C)x + (A + 2B - 2C)}{(x - 2)(x - 1)^2} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} A + B &= 3 \\ -2A - 3B + C &= -6 \\ A + 2B - 2C &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= 2 \\ B &= 1 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{2}{x - 2} + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}$$

حالت سوم:

هرگاه عوامل ضربی مخرج پولینوم درجه دو که قابل تجزیه نبوده و تکرار هم نگردیده است، یک جزو پولینوم واقعی $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ می باشد که شکل کسر $\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$ را دارد.

مثال 1: کسر $\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4}$ را به کسور قسمی آن تجزیه کنید.

حل: عوامل ضربی پولینوم مخرج عبارت است از: $x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = (x+1)(x^2 + 2x + 4)$: از آنجا که عامل $x^2 + 2x + 4$ در اعداد حقیقی حل ندارد، یعنی قابل تجزیه نیست، می‌توانیم بنویسیم که:

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 4} + \frac{C}{x + 1} = \frac{(Ax + B)(x + 1) + C(x^2 + 2x + 4)}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4}$$

$$= \frac{(A + C)x^2 + (A + B + 2C)x + (B + 4C)}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4}$$

$$\left. \begin{array}{l} A + C = 5 \\ A + B + 2C = 8 \\ B + 4C = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 3 \\ B = 1 \\ C = 2 \end{array} \Rightarrow \frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 4} + \frac{2}{x + 1}$$



کسرهای زیر را به کسور قسمی تجزیه نمایید:

-1

a) $\frac{-x^2 + 2x - 12}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5}$

b) $\frac{4x^2 - 3x + 8}{x^3 - 2x + 4}$

c) $\frac{2x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 3x + 4}{x^2 - 9x + 3}$

-2

a) $\frac{1}{x^4(x+1)}$

b) $\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$

c) $\frac{x^4 + 1}{x^2(x-1)}$

d) $\frac{3x^2 + 5x + 10}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$

e) $\frac{3x^2 - 18x + 36}{x^3 - 6x^2 + 9x}$

-3

a) $\frac{3x + 7}{(x^2 + x + 1)(x^2 - 4)}$

b) $\frac{x^2 + 3x + 4}{x^4 - 2x^2 + 1}$

c) $\frac{x^2 + 13x + 10}{x^3 - 5x^2}$

d) $\frac{x^5}{x^4 - 1}$

انتگرال‌های توابع اکسپوننشیل
روابط مقابل را با هم مقایسه کنید.

$$\log_a b = x$$

$$a^x = b$$



- تابع $f(x) = a^x$ چه نوع تابعی است؟
- یک مثال از تابع لوگاریتمی را بنویسید؟
- رابطه $\log_a x = c$ را به شکل اکسپوننشیل بنویسید؟
- از فعالیت فوق نتیجه زیر را می‌توانیم بنویسیم:

برای تابع اکسپوننشیل $f(x) = e^x$ داریم که: $\int e^x dx = e^x + C$ است، پس بصورت عموم داریم که:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1)$$

ثبوت: با استفاده از طریقه تعویضی داریم:

$$\int a^x dx$$

$$u = a^x \Rightarrow du = a^x \ln a$$

$$du = a^x \ln a dx$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{a^x \ln a}$$

$$\begin{aligned} \int a^x dx &= \int a^x \frac{du}{a^x \cdot \ln a} = \int \frac{du}{\ln a} \\ &= \frac{1}{\ln a} \int du = \frac{1}{\ln a} u = \frac{a^x}{\ln a} + C \end{aligned}$$

مثال: انتیگرال $f(x) = 2^{x-3}$ را دریابید.

حل: با استفاده از قوانین طاقت داریم که:

$$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{1}{8} 2^x$$

$$\int 2^{x-3} dx = \int \frac{1}{8} 2^x dx = \frac{1}{8} \int 2^x dx$$

$$\frac{1}{8} \int 2^x dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

مثال 2: انتیگرال توابع اکسپوننشیل زیر را به دست آرید.

1) $\int 3^{x+1} dx = ?$

2) $\int 6^{x-1} dx = ?$

حل:

1) $\int 3^{x+1} dx = ?$

$$3^{x+1} = 3^x \cdot 3$$

$$\int 3^x \cdot 3 dx = 3 \int 3^x dx = 3 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

2) $\int 6^{x-1} dx = ?$

$$6^{x-1} = \frac{6^x}{6} = \frac{1}{6} \cdot 6^x$$

$$\int \frac{1}{6} 6^x dx = \frac{1}{6} \int 6^x dx = \frac{1}{6} \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + C$$

تمرین



انتیگرال‌های توابع اکسپوننشیل زیر را محاسبه کنید.

a) $\int 3^{x+1} dx$

b) $\int 2^{-x} dx$

c) $\int a^{x+b} dx$

d) $\int \frac{1}{a^x} dx$

e) $\int 2^x \cdot 3^x dx$

f) $\int \frac{2^x}{3^x} dx$

g) $\int \frac{4^{x+3}}{2^x} dx$

h) $\int \frac{5^x + 3^x}{2^x} dx$

i) $\int (1 + 2^x) dx$

انتگرال‌های توابع لوگاریتمی

نشان دهید که تابع در کدام حالت نزولی و در کدام حالت صعودی است.

$$y = a^x$$

$$\int a^x dx = ?$$



- لوگاریتم به چند نوع است، روابط عمومی آن را بنویسید؟
 - معادلات $x = b^y$ و $y = \log_b x$ با یکدیگر چه رابطه‌یی دارند؟
 - آیا می‌توانیم از توابع لوگاریتمی انتگرال بگیریم؟
- نتیجه فعالیت فوق را می‌توان به طور زیر بیان کرد:

هرگاه $f(x) = \ln x$, $(x \in \mathbb{R}^+)$ باشد، برای لوگاریتم طبیعی تابع می‌توانیم بنویسیم که:

$$\int \ln x dx = x \cdot \ln x - x + C$$

به صورت عموم برای لوگاریتم توابع داریم که: $f(x) = \log_a x$ ($x, a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$)

$$\int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e}$$

ثبوت:

1- اگر $a = e$ وضع شود؛ پس:

$$\int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x dx = \int \ln x dx = x \log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e)$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

$$\int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x, \quad du = \frac{1}{x} \log_a e dx$$

$$dv = dx, \quad v = x$$

$$\int \log_a x dx = x \log_a x - \int x \frac{1}{x} \log_a e dx$$

$$= x \log_a x - \log_a e \int dx$$

$$= x \log_a x - x \log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

مثال: انتیگرال $\int \ln 3x dx$ را به دست آورید:

حل:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x) dx = \int \ln 3 dx + \int \ln x dx$$

$$= x \ln 3 + x \ln x - x$$

$$= x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

یادداشت:

I- با روش تعویض *Substitution* می توان انتیگرال نامعین را حل کرد.

مثال 1: انتیگرال های زیر را دریابید:

حل:

$$a) \quad I = \int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx$$

$$-2x-3 = u, \quad -2 = \frac{du}{dx}, \quad dx = -\frac{1}{2} du$$

$$I = \int \frac{1}{2} e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4} \int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C = -\frac{1}{4} e^{-2x-3} + C$$

$$b) \quad I = \int \frac{2dx}{x+2}$$

$$x+2 = u, \quad 1 = \frac{du}{dx}, \quad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln|u| + C = 2 \ln|x+2| + C$$

مثال 2: انتیگرال $f(x) = e^{2x}$ را دریابید.

حل: با استفاده از تعویض داریم که:

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow \int f(x) dx = \int e^{2x} dx = ?$$

$$u = 2x \Rightarrow du = 2dx$$

$$dx = \frac{du}{2}$$

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow \int f(x) dx = \int e^u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du$$

$$\int e^{2x} dx = \frac{e^u}{2} + C = \frac{e^{2x}}{2} + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2 = e^{2x} = f(x) \text{ امتحان:}$$

مثال 3: انتیگرال $f(x) = x \cdot \ln x^2$ را حساب کنید.

حل:

$$f(x) = x \cdot \ln x^2 \Rightarrow \int f(x) dx = \int (x \cdot \ln x^2) dx = ?$$

$$u = x^2$$

$$du = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} du$$

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int x \cdot \ln u \cdot \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int \ln u du = \frac{1}{2} [u \cdot \ln u - u + C] = \frac{1}{2} u \cdot \ln u - \frac{1}{2} u + C \\ &= \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln x^2 - \frac{1}{2} x^2 + C \end{aligned}$$

II- انتیگرال‌های معین نیز از طریق تعویض حل می‌شوند:

مثال 1: انتیگرال $\int_{-1}^1 e^{2x} dx$ را پیدا کنید.

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow \int_{-1}^1 e^{2x} dx$$

$$u = 2x \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -1, u = 2x \Rightarrow u = 2(-1) = -2 \\ x = 1, u = 2x \Rightarrow u = 2(1) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \int_{-1}^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_{-2}^2 = 3.627$$

مثال 2: قیمت انتیگرا $f(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln x^2 dx$ را پیدا کنید.

$$u = x^2$$

$$du = 2x dx \Rightarrow dx \frac{1}{2x} du$$

$$\left. \begin{array}{l} x=1, \quad u=x^2=1 \\ x=2, \quad u=x^2=4 \end{array} \right\} \Rightarrow \int_1^2 2x \cdot \ln x^2 dx = \int_1^4 2x \cdot \ln u \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln u du$$

$$= [u \cdot \ln u - u]_1^4 = [4 \cdot \ln 4 - 4] - [1 \cdot \ln 1 - 1] \approx 2.545$$

تمرین



انتیگراهای زیر را حل کنید:

a) $\int \ln 2x^3 dx$

b) $\int \ln \sqrt{x} dx$

c) $\int \log \frac{x}{2} dx$

d) $\int 3 \log \frac{1}{x} dx$

e) $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} dx$

محاسبه انتیگرال توسط کسور قسمی

کسور قسمی کسر مقابل را دریابید.

$$\frac{5}{x^2 - 3x + 2} = \frac{?}{(x-2)} + \frac{?}{(x-1)}$$

قبلاً تجزیه کسر را به کسور قسمی مطالعه نمودیم. حالا می‌خواهیم انتیگرال توابع را با استفاده از کسور قسمی تحت مطالعه قرار دهیم:

مثال 1: $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx$ را حساب کنید.

حل: با استفاده تجزیه کسور قسمی می‌نویسیم:

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

$$\frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)} = \frac{Ax-4A+Bx-2B}{(x-2)(x-4)} = \frac{(A+B)x-4A-2B}{(x-2)(x-4)}$$

$$A+B=7$$

$$-4A-2B=-12$$

$$A=7-B$$

$$-4(7-B)-2B=-12$$

$$-28+4B-2B=-12$$

$$-28+2B=-12$$

$$2B=16 \Rightarrow B=8$$

$$A=7-8=-1$$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8} = -\frac{1}{x-2} + \frac{8}{x-4}$$

پس می‌توانیم بنویسیم که:

$$\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx = \int \frac{-1}{x-2} dx + \int \frac{8}{x-4} dx$$

$$\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx = -\int \frac{1}{x-2} dx + 8 \int \frac{1}{x-4} dx$$

$$= -\ln|x-2| + 8\ln|x-4| + C = \ln(x-2)^{-1} + \ln(x-4)^8 + C$$

$$= \ln[(x-2)^{-1} \cdot (x-4)^8] = \ln\left[\frac{(x-4)^8}{x-2}\right] + C$$

مثال 2: $\int \frac{-5x+9}{x^2+x-6} dx$ را حساب کنید.

حل: مخرج را به فکتور تجزیه می کنیم:

پس:

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6} = \frac{-5x+9}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$$

$$\frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{Ax+3A+Bx-2B}{(x-2)(x+3)} = \frac{(A+B)x+3A-2B}{(x-2)(x+3)}$$

$$(A+B)x+3A-2B = -5x+9$$

$$A+B = -5 \Rightarrow A = -5-B$$

$$3A-2B = -5x+9$$

قیمت‌های عددی A و B عبارت اند از:

$$3(-5-B)-2B=9$$

$$-15-5B=9$$

$$-5B=24$$

$$B = -\frac{24}{5}$$

$$A = -5 + \frac{24}{5} = \frac{-25+24}{5} = -\frac{1}{5}$$

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6} = \frac{-\frac{1}{5}}{x-2} - \frac{\frac{24}{5}}{x+3}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{-5x+9}{x^2+x-6} dx &= \int \frac{-\frac{1}{5}}{x-2} dx - \int \frac{\frac{24}{5}}{x+3} dx = -\frac{1}{5} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{24}{5} \int \frac{1}{x+3} dx \\ &= -\frac{1}{5} \ln(x-2) - \frac{24}{5} \ln(x+3) \end{aligned}$$

$$= \ln(x-2)^{-\frac{1}{5}} + \ln(x+3)^{-\frac{24}{5}} = \ln \left[(x-2)^{-\frac{1}{5}} \cdot (x+3)^{-\frac{24}{5}} \right] + C$$



تمرین

قیمت انتیگرال‌های زیر را توسط کسور قسمی به دست آرید:

a) $\int \frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3} dx$

b) $\int \frac{x-2}{x^2-6x+5} dx$

c) $\int \frac{x^6}{x^4+3x^2+2} dx$

نکات مهم فصل

- اگر $f(x) = e^x$ باشد، مشتق تابع عبارت از $f'(x) = e^x$ است.
- اگر $f(x) = a^x$ باشد، مشتق این تابع عبارت از $f'(x) = a^x \cdot \ln a$ است.
- اگر $f(x) = \log_a x$ باشد، مشتق این تابع عبارت از $f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$ است.
- اگر $f(x) = \log_a g(x)$ باشد، مشتق این تابع $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \log_a e$ است.
- **کسور قسمی:** کسرهای کوچک یک کسر واقعی که به شکل حاصل جمع نوشته شده باشد، طوری که اگر آنها با هم جمع گردند، کسر داده شده واقعی به دست آید، کسور قسمی نامیده می شوند.
- هرگاه در $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ پولینوم مخرج $P_n(x)$ از عوامل ضربی یی که تکرار نشده، تشکیل گردیده باشد، به شکل زیر می توان آن را تجزیه کرد:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} + \dots + \frac{N}{x-x_n}$$
- هرگاه بعضی از عوامل ضربی مخرج پولینوم درجه یک تکرار گردیده باشد، یعنی اگر عامل $x-x_0$ ، n دفعه تکرار گردیده باشد، می توانیم بنویسیم که:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2} + \dots + \frac{N}{(x-x_0)^n}$$
- عوامل ضربی مخرج پولینوم درجه دو که قابل تجزیه نبوده و تکرار هم نگردیده است، یک جزو پولینوم واقعی $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ می باشد که شکل کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ را دارد.
- برای توابع اکسپوننشیل می توانیم بنویسیم که:

$$\int e^x dx = e^x + C \quad , \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad , \quad (a \in \mathbb{R}^+ , a \neq 1)$$
- برای توابع لوگاریتمی می توانیم بنویسیم که:

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C \quad , \quad \int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$
- بعضی از توابع بدون تعویض حل می گردند؛ مانند:

$$f(x) = e^x \Rightarrow \int f(x) dx = \int e^x dx = e^x + C$$

تمرینات عمومی فصل پنجم

1- مشتق تابع $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$ را پیدا کنید؟

2- مشتق تابع $f(x) = \ln \sqrt{x-1}$ را دریابید؟

3- مشتق تابع $y = 2x^{2x}$ را دریابید؟

4- مشتق تابع $f(x) = \log \sqrt{x^3}$ را دریابید؟

5- کسور واقعی زیر را به اجزای آن تجزیه کنید.

1) $\frac{x+1}{x^2-x-6}$

2) $\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}$

3) $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$

6- انتگرال‌های زیر را دریابید؟

1) $\int 5t^7 dt$

2) $\int \frac{x^3-3}{x^2} dx$

3) $\int (2\cos x - 5\sin x + e^x) dx$

4) $\int \sqrt{\cos x} \sin x dx$

5) $\int x e^{-x} dx$

6) $\int \frac{5}{(2x+1)(x-2)} dx$

7) $\int_{-1}^1 3x^2 \sqrt{x^3+1} dx$

7- مشتق توابع زیر را دریابید.

a) $y = \ln(x^2 + x + 1)$

b) $y = \ln(\sin x)$

c) $y = e^{x^2+1}$

d) $y = \sqrt[3]{2}$

فصل ششم

تطبيقات انتیگراال



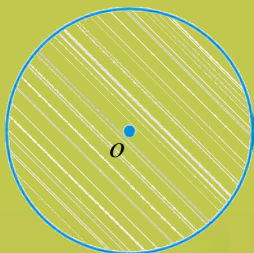
محاسبه مساحت محصور شده توسط یک منحنی

Accounting of Area bounded by one Curve

فارمول مساحت دایره مقابل را که در آن قسمتی

از یک سطح توسط یک منحنی بسته محصور

شده است دریافت کنید.



تابع $y = 1 - x^2$ داده شده است:

- نقطه بحرانی (Critical Point) و تقاطع با محور x تابع فوق را یافته و گراف آنرا رسم نمایید.

- مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y = 1 - x^2$ و محور x را با استفاده از انتگرال حساب کنید.

- فعالیت فوق را برای تابع $y = -x^2 + 2x$ در روی محور x تکرار نموده و مساحت سطح محصور شده توسط منحنی و محور x را حساب کنید.

از انجام فعالیت فوق نتایج زیر به دست می آید:

– انتگرال $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ مساحت سطحی را نمایش می دهد که توسط منحنی تابع

$y = f(x)$ و محور x در انتروال $[a, b]$ محصور شده است.

– اگر تابع $f(x)$ در انتروال بسته $[a, b]$ متمادی و مثبت باشد یعنی $y = f(x) \geq 0$ ، در این

حالت گراف تابع $f(x)$ همیشه در قسمت بالایی محور x است. اما اگر $y = f(x) \leq 0$ باشد، در

این حالت گراف تابع $f(x)$ در قسمت پایینی محور x قرار دارد و منفی است.

مثال 1: مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $x = 4 - y^2$ و محور y را حساب کنید.

حل: ابتدا نقطه بحرانی و تقاطع نقاط با محور y را یافته و بعداً گراف آن را ترسیم می‌نماییم:
 برای به دست آوردن نقطه بحرانی، ابتدا از تابع مشتق گرفته و آن را مساوی با صفر قرار می‌دهیم و
 برای به دست آوردن نقاط تقاطع با محاورات تابع را مساوی با صفر قرار می‌دهیم:

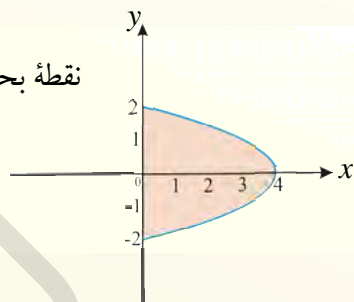
$$x = 4 - y^2 \Rightarrow x' = -2y = 0$$

$$x' = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$y = 0, \quad x = 4 - y^2 \Rightarrow x = 4 - 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (4, 0) \text{ نقطه بحرانی}$$

$$x = 0, \quad 4 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 4$$

$$y = \pm 2 \Rightarrow (0, 2), (0, -2) \text{ نقاط تقاطع با محاورات}$$



چون هر دو نقطه معادله $x = 4 - y^2$ در انتروال $[-2, 2]$ نظر به محور x متناظر اند، پس با در نظر داشت نصف مساحت سرحدات انتیگرا را تغییر داده و آن را ضرب 2 می‌نماییم:

$$A = \int_{-2}^2 (4 - y^2) dy = 2 \int_0^2 (4 - y^2) dy = 2 \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2$$

$$A = 2 \left[\left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - 0 \right] = 2 \left(8 - \frac{8}{3} \right) = 2 \left(\frac{24 - 8}{3} \right) = 2 \left(\frac{16}{3} \right) = \frac{32}{3}$$

مثال 2: مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ و محور x را محاسبه کنید.

حل: برای تعیین سطح محصور شده، ابتدا نقطه بحرانی و تقاطع با محور x را به دست می‌آوریم:

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2, \quad y' = -x$$

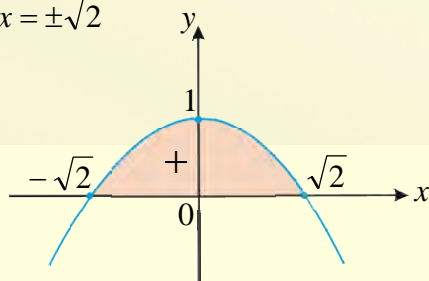
$$y' = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x = 0, \quad y = 1 - \frac{1}{2}x^2 = 1 \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{2}0^2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0, 1) \text{ نقطه بحرانی}$$

$$y = 0, \quad 1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = 2, \quad x = \pm\sqrt{2}$$

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0) \text{ نقاط تقاطع با محاورات}$$



$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (1 - \frac{1}{2}x^2) dx = 2 \int_0^{\sqrt{2}} (1 - \frac{1}{2}x^2) dx = 2([x - \frac{1}{6}x^3]_0^{\sqrt{2}})$$

$$A = 2(\sqrt{2} - \frac{(\sqrt{2})^3}{6} - 0) = 2(\frac{6\sqrt{2} - (\sqrt{2})^3}{6}) = 2(\frac{6\sqrt{2} - \sqrt{8}}{6})$$

$$= (\frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{3}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$A = 1.8853$$

مثال 3: گراف تابع $y = x^2 - 3$ با محور x یک سطح را محصور نموده است؛ مساحت این سطح را حساب کنید.

حل: ابتدا برای تعیین نمودن سطح گراف تابع، نقطه بحرانی و نقاط تقاطع با محور x را به دست می آوریم:

$$y = x^2 - 3 \Rightarrow y' = 2x$$

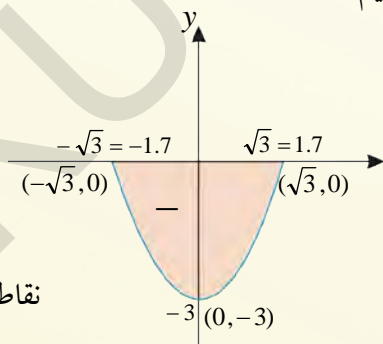
$$y' = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x = 0, y = x^2 - 3 \Rightarrow y = 0^2 - 3$$

$$\Rightarrow y = -3 \Rightarrow (0, -3) \text{ نقطه بحرانی}$$

$$y = 0, x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0) \text{ نقاط تقاطع با محاورات}$$



چون تابع $y = x^2 - 3$ در انتروال $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ متناظر است و همچنان گراف آن در قسمت پایینی محور x و انتیگراال آن منفی می باشد؛ برای دریافت مساحت کلی، مساحت نصف سرحدات را ضرب 2 می نماییم:

$$A_1 = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^2 - 3) dx = -2 \int_0^{\sqrt{3}} (x^2 - 3) dx = -2(\int_0^{\sqrt{3}} x^2 dx - 3 \int_0^{\sqrt{3}} dx) = -2([\frac{1}{3}x^3]_0^{\sqrt{3}} - [3x]_0^{\sqrt{3}})$$

$$= -2(\frac{1}{3}[(\sqrt{3})^3 - 0] - 3[\sqrt{3} - 0]) = -2(\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3})$$

$$= -\frac{2}{3}(\sqrt{3})^3 + 6\sqrt{3} = -\frac{2}{3}(1.7)^3 + 6(1.7) = -\frac{2}{3}(4.913) + 10.2 = -\frac{9.826}{3} + 10.2$$

$$= -3.2753 + 10.2 = 6.9247$$

مثال 4: گراف منحنی تابع $y = x^2 - 3x$ را رسم و مساحت سطح محصور شده توسط منحنی مذکور و محور x را در انتروال $[-1, 4]$ محاسبه کنید.

حل: نخست نقطه بحرانی منحنی و نقاط تقاطع آن با محاورات را دریافت می کنیم:

$$y = x^2 - 3x$$

$$y' = 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3, x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}, y = x^2 - 3x \Rightarrow y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right)$$

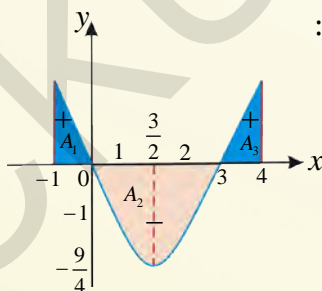
$$y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4}, (x, y) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right) \text{ نقطه بحرانی}$$

چون $y'' = 2 > 0$ است، پس نقطه $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ نقطه اصغری مطلق تابع می باشد و محل تقاطع آن با محور x عبارتست از:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = 3$$



$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^0 (x^2 - 3x) dx - \int_0^3 (x^2 - 3x) dx + \int_3^4 (x^2 - 3x) dx$$

$$A = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^0 - \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_0^3 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_3^4$$

$$A = \left[\left(\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{3}{2} \cdot (-1)^2\right)\right] - \left[\left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{3}{2} \cdot 3^2\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0\right)\right] +$$

$$\left[\left(\frac{1}{3} \cdot (4)^3 - \frac{3}{2} \cdot (4)^2\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (3)^3 - \frac{3}{2} \cdot (3)^2\right)\right]$$

$$= -\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 27 - \frac{3}{2} \cdot 9\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot 64 - \frac{3}{2} \cdot 16\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 27 - \frac{3}{2} \cdot 9\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1 - 27 + 64 - 27}{3} + \frac{3 + 27 - 48 + 27}{2} = \frac{65 - 54}{3} + \frac{57 - 48}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22 + 27}{6} = \frac{49}{6}$$

مثال 5: مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y = x^2 - 2x$ و محور x را در انتروال $[-1, 2]$ دریابید.

حل: ابتدا نقطه بحرانی و بعداً نقاط تقاطع با محور x را دریافت می‌کنیم:

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow y' = 2x - 2 = 0$$

$$2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

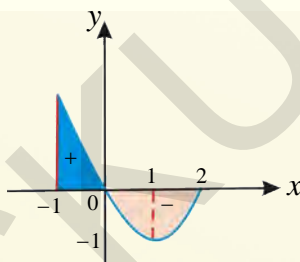
$$x = 1, \quad y = x^2 - 2x = 1^2 - 2(1) = -1 \Rightarrow (1, -1) \text{ نقطه بحرانی}$$

چون $y'' = 2 > 0$ است، پس تابع در نقطه $(1, -1)$ یک اصغری مطلق دارد و نقاط تقاطع آن با محور x طور زیر است: $(1, -1)$

$$y = 0, \quad x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2$$



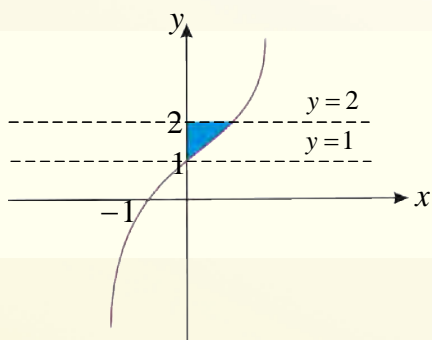
چون منحنی در انتروال $[-1, 2]$ از مبدا می‌گذرد، منحنی در انتروال $[-1, 0]$ بالای محور x و در انتروال $[0, 2]$ تحت محور x است؛ بنابراین انتیگرال آن را منفی می‌گیریم:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) dx - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 - \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_0^2 \\ &= \left(0 - \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) \right) - \left(\left(\frac{8}{3} - 4 \right) - 0 \right) = -\left(-\frac{1}{3} - 1 \right) - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) = -\left(\frac{-1-3}{3} \right) - \left(\frac{8-12}{3} \right) \\ &= -\left(\frac{-4}{3} \right) - \left(\frac{-4}{3} \right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$



تمرین

1- مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y = \sin x$ و محور x را در انتروال $[-2\pi, 2\pi]$ حساب کنید.



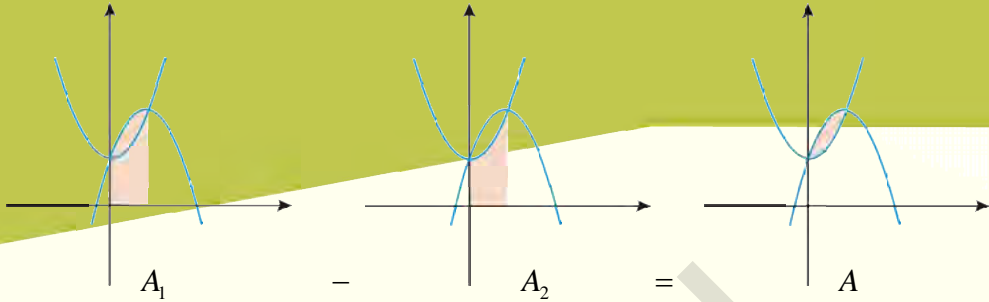
2- مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y = x^3 + 1$ و محور y و خطوط $y = 1$ و $y = 2$ را نظر به شکل دریابید؟

3- مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$ و محور x و دو خط $x = 0$ و $x = 1$ را حساب کنید.

محاسبه مساحت محصور شده توسط دو منحنی

Accounting of area bounded by two curves

با در نظر داشت اشکال زیر، در مورد درست بودن رابطه $A = A_1 - A_2$ چه می گوئید؟



توابع $y_1 = 1 - x^2$ و $y_2 = x^2 - 1$ داده شده است:

- از رابطه $y_1 = y_2$ قیمت x را دریابید.
- با در نظر داشت قیمت های دریافت شده، گراف آنها را رسم کنید.
- چون گراف تابع y_1 بالاتر از تابع y_2 است، پس حاصل تفریق انتیگرال های توابع $(y_1 - y_2)$ را در انتروال تعیین شده x حساب کنید.
- فعالیت فوق را برای منحنی تابع $y = x^2$ و خط $y = x + 2$ تکرار نموده و مساحت سطح محصور شده توسط آنها را حساب کنید.
- از فعالیت فوق به نتایج زیر دست می یابیم:
- برای محاسبه سطح محصور شده توسط دو منحنی $y_1 = f(x)$ و $y_2 = g(x)$ در صورتی که $f(x) > g(x)$ باشد یعنی گراف تابع $f(x)$ بالاتر از گراف تابع $g(x)$ قرار داشته باشد؛ ابتدا نقطه تقاطع هر دو منحنی را یافته و بعداً مساحت بین منحنی با محور x را در انتروال $[a, b]$ محاسبه می کنیم:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

- اگر $f(x) < g(x)$ باشد، یعنی گراف تابع $g(x)$ بالاتر از گراف تابع $f(x)$ قرار داشته باشد

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \quad \text{داریم که:}$$

مثال 1: مساحت سطح محصور شده توسط دو منحنی $f(x) = 2x - x^2$ و $g(x) = x^2$ را حساب کنید.

حل: ابتدا نقاط تقاطع هر دو منحنی را می‌یابیم:

$$f(x) = 2x - x^2, \quad g(x) = x^2$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x - x^2 = x^2$$

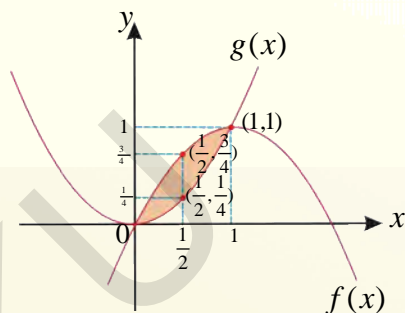
$$2x - x^2 - x^2 = 0$$

$$2x - 2x^2 = 0$$

$$2x(1 - x) = 0$$

$$2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$1 - x = 0 \Rightarrow x_2 = 1$$



نظر به گراف بالا، نقاط تقاطع هر دو منحنی عبارت از $(1,1)$ و $(0,0)$ است، حال مساحت محصور شده را دریافت می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 [2x - x^2 - x^2] dx = \int_0^1 [2x - 2x^2] dx = \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = \left(1 - \frac{2}{3} \right) - 0 = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

مثال 2: مساحت سطح محصور شده توسط منحنی $f(x) = x^2 - 6x + 2$ و خط $g(x) = 2 - x$ را حساب کنید.

حل:

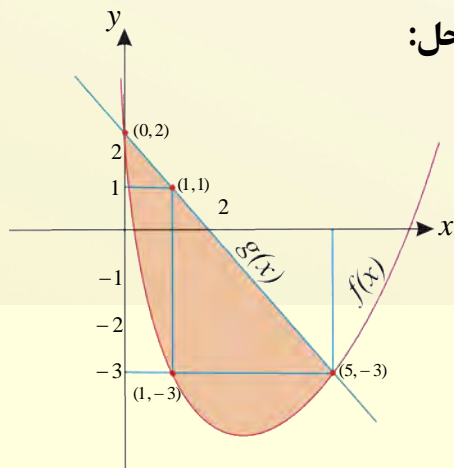
$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + 2 \\ g(x) &= 2 - x \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

$$x^2 - 6x + 2 = 2 - x \Rightarrow x^2 - 6x + 2 - 2 + x = 0$$

$$x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x - 5) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 5$$

$$\Rightarrow (0,2), (5,-3) \text{ نقاط تقاطع خط و منحنی}$$



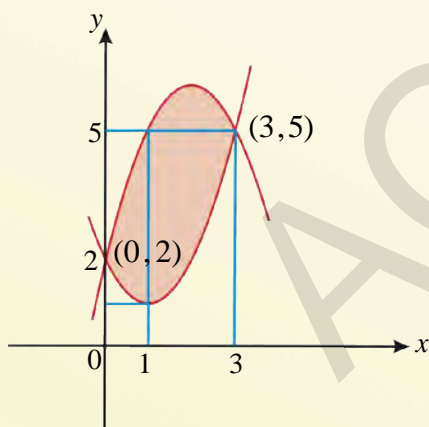
از شکل معلوم می‌شود که گراف $g(x)$ بالاتر از گراف تابع $f(x)$ قرار دارد به این معنی که:

$$g(x) > f(x)$$

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_0^5 (2 - x - x^2 + 6x - 2) dx \\ &= \int_0^5 (-x - x^2 + 6x) dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} \right]_0^5 = \left(-\frac{125}{3} + 5 \cdot \frac{25}{2} \right) - 0 = -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} \\ &= \frac{-250 + 375}{6} = \frac{125}{6} \end{aligned}$$

مثال 3: مساحت سطح محصور شده توسط منحنی‌های توابع $f(x) = -x^2 + 4x + 2$ و $g(x) = x^2 - 2x + 2$ را دریابید.

حل:



$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x + 2 \\ g(x) &= x^2 - 2x + 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) &= g(x) \\ -x^2 + 4x + 2 &= x^2 - 2x + 2 \\ \Rightarrow -x^2 + 4x + 2 - x^2 + 2x - 2 &= 0 \\ -2x^2 + 6x &= 0 \Rightarrow x(-2x + 6) &= 0 \\ \Rightarrow x_1 = 0, \quad -2x = -6 \Rightarrow x_2 &= 3 \end{aligned}$$

نقاط تقاطع دو منحنی $(0, 2)$, $(3, 5)$

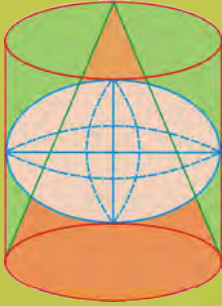
و از شکل دیده می‌شود که گراف تابع $f(x)$ بالاتر از گراف تابع $g(x)$ قرار دارد به این معنی که $g(x) < f(x)$ است.

$$\begin{aligned}
 A &= \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx - \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx \\
 &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 2x\right]_0^3 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 2x\right]_0^3 \\
 &= -\frac{1}{3} \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 6 - 0 - \left[\frac{1}{3} \cdot 27 + 9 - 6 + 0\right] \\
 &= -9 + 18 - 9 + 9 \\
 &= 9
 \end{aligned}$$

تمرین



- 1- مساحت سطح محصور شده توسط دو منحنی $y = -x^2 + 4x$ و $y = x^2$ را دریابید.
- 2- مساحت سطح محصور شده توسط پارابول $y^2 = 2x - 2$ و $y = x - 5$ را حساب کنید.
- 3- مساحت سطح محصور شده توسط منحنی $y^2 = 2x + 6$ و خط $y = x - 1$ را محاسبه کنید.



در صنوف گذشته، حجم اجسام را با استفاده از فرمول‌هایی که بدون ثبوت آنها را قبول کرده بودیم، به دست می‌آوردیم؛ اما در اینجا فرمول‌های حجم اجسام را با استفاده از انتگرال‌های معین ثابت می‌کنیم.



• یک خط مستقیم و یک نقطه را در فضا طوری در نظر بگیرید که نقطه در قسمت وسطی خط مذکور قرار داشته باشد.

• جسمی را که از دوران خط مستقیم حول نقطه به دست می‌آید، نام بگیرید.

• فرمول حجم جسم مذکور را بنویسید و بگویید که چطور آن را ثابت می‌کنیم؟

نتیجه فعالیت فوق را چنین بیان می‌کنیم:

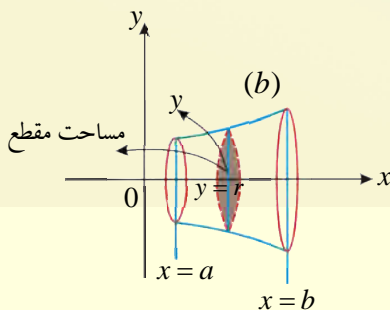
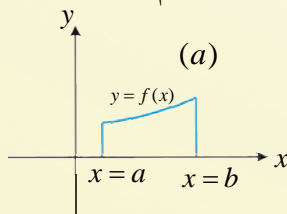
• هرگاه مساحت منحنی تابع متمادی $y = f(x)$

نظر به شکل (a) توسط خطوط $x = a$ و $x = b$

محصور شده باشد؛ جسمی که از دوران مساحت

بین منحنی تابع فوق حول محور x به وجود

می‌آید، شکل (b) تقریباً استوانه‌یی می‌باشد.



ارتفاع استوانه $\Delta x = b - a$ می‌باشد و سطح آن توسط سطح دایروی محصور گردیده که این سطح را مقطع گویند. ما می‌دانیم که مساحت دایره نظر به محور x ، $A(x) = \pi r^2$ و شعاع این مقطع نظر به شکل، موازی با محور y است؛ بنابراین $y = r$ می‌شود و فارمول حجم این جسم نظر به مجموع ریمان به طور زیر به دست می‌آید:

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x) \Delta x = \int_a^b \pi r^2 dx = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

• اگر مساحت منحنی تابع $x = f(y)$ توسط

خطوط $y = d$ و $y = c$ محصور شده باشد؛

مساحت مقطع چنین استوانه‌یی نظر به محور

$A(y) = \pi r^2$ ، y و ارتفاع آن $\Delta y = d - c$

و شعاع آن $x = r$ می‌باشد. حجمی که از

دوران این مساحت به دست می‌آید، چنین

است:

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(y) \Delta y = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi x^2 dy = \int_a^b \pi [f(y)]^2 dy$$

حجم اجسام دورانی به کمک انتیگرال‌ها به طور زیر ثبوت می‌گردد:

1: حجم کره را با استفاده از انتیگرال محاسبه کنید.

ثبوت: می‌دانیم سطح کره از دوران نیم‌دایره حول قطرش به دست می‌آید و معادله دایره عبارت

$$\text{است از: } x^2 + y^2 = r^2$$

حال حجم نصف کره را به دست آورده و آن را دو چند می‌کنیم تا حجم کل کره به دست آید.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y^2 = r^2 - x^2$$

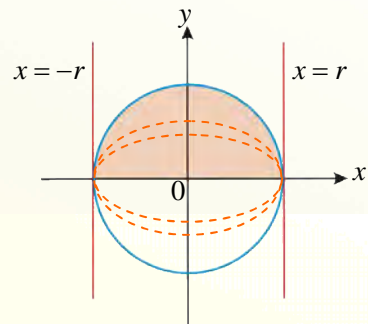
$$V = \int_{-r}^r \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx$$

$$= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r$$

$$= 2\pi \left[(r^3 - \frac{r^3}{3}) - 0 \right]$$

$$= 2\pi \left(\frac{3r^3 - r^3}{3} \right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{2r^3}{3} \right)$$



$$V (\text{حجم کره}) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

2: حجم مخروط را توسط انتیگرال محاسبه کنید.

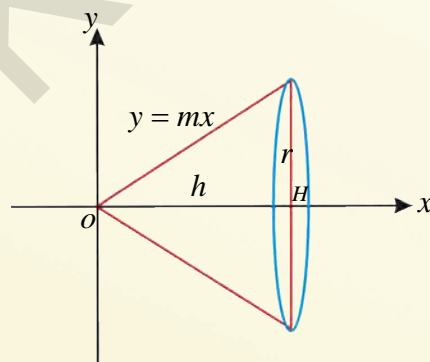
ثبوت: چون سطح مخروطی از دوران خط $y = mx$ حول محور x به دست می آید، بنابراین:

$$V = \int_0^h \pi y^2 dx$$

$$= \int_0^h \pi m^2 x^2 dx = \pi m^2 \int_0^h x^2 dx$$

$$= \pi m^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \pi m^2 \left(\frac{h^3}{3} \right)$$

$$= \frac{\pi h}{3} (mh)^2$$



در شکل بالا دیده می شود که قاعده مخروط دایروی شکل و شعاع آن، موازی با محور y است؛ یعنی: $y = r$ و همچنان ارتفاع مخروط (h) منطبق بر محور x می باشد. از اینجا $x = h$ می شود، بنابراین در رابطه $y = mx$ قیمت وضع می کنیم به:

$$y = mx \Rightarrow r = mh$$

$$= \frac{\pi h}{3} r^2$$

$$V = \pi r^2 \times \frac{h}{3}$$

چون مساحت قاعده مخروط دایروی است و مساحت دایره πr^2 می باشد، داریم که:

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{h}{3}$$

$$V(\text{حجم مخروط}) = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

3: حجم الپس را که از دوران مساحت بین منحنی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ و محور x ، حول قطر بزرگ به وجود می آید، حساب کنید.

ثبوت: حجم نیم الپس را از دوران مساحت محصور شده حول قطر بزرگش به دست آورده و آنرا دو چند می کنیم تا حجم کل الپس به دست آید:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$$

$$V = \int_{-a}^a \pi y^2 dx = \pi \int_{-a}^a [b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2] dx$$

$$= 2\pi \int_0^a [b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2] dx = 2\pi [b^2 x - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3}]_0^a$$

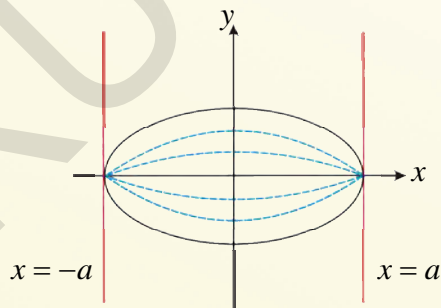
$$= 2\pi [(b^2 a - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3}) - 0] = 2\pi [b^2 a - \frac{b^2 a}{3}]$$

$$= 2\pi [\frac{3b^2 a - b^2 a}{3}] = 2\pi [\frac{2b^2 a}{3}]$$

$$V = \frac{4}{3} \pi b^2 a \Rightarrow \text{حجم الپس حول قطر بزرگ} = \frac{4}{3} \pi b^2 a$$

اگر محراق های بیضوی روی محور y قرار داشته باشد و بخواهیم انتیگرا ل آنرا حساب کنیم، حجم حول قطر کوچک الپس به طور زیر به دست می آید:

$$\text{حجم الپس حول قطر کوچک} = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

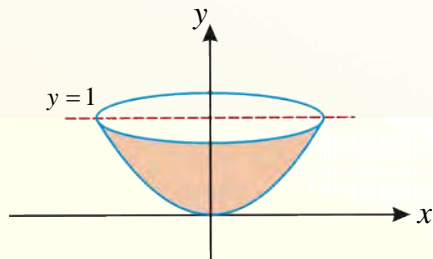


مثال 1: حجم جسمی را که از دوران مساحت بین منحنی تابع $y = x^2$ و خط $y = 1$ حول محور y به دست می آید، حساب کنید.

حل: ابتدا شکل را رسم و بعداً حجم آنرا حساب می کنیم:

$$V = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_0^1 y dy = \frac{1}{2} \pi y^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \pi$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{2}$$



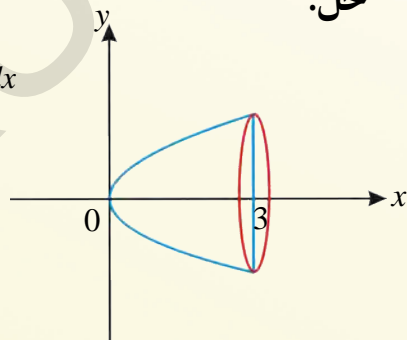
مثال 2: حجم جسمی را که از دوران بین تابع $y = \sqrt{2x}$ و خط $x = 3$ دست می آید، دریابید.

حل:

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_0^3 \pi [\sqrt{2x}]^2 dx = \pi \int_0^3 [2x] dx = \pi \int_0^3 2x dx$$

$$V = 2\pi \int_0^3 x dx = 2\pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3$$

$$V = 9\pi$$



یادداشت: اگر توابع $y_1 = f(x)$ و $y_2 = g(x)$ در انتروال $[a, b]$ متمادی باشند، حجم جسمی

که از دوران مساحت بین منحنی های $f(x)$ و $g(x)$ و دو خط $x = a$ و $x = b$ به حول محور x

تشکیل می شود، از رابطه زیر به دست می آید:

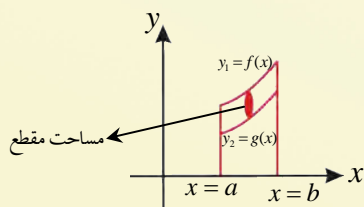
Δx ارتفاع استوانه

$$A(x) = (\text{مساحت مقطع استوانه}) = \pi y_1 - \pi y_2 = \pi (y_1 - y_2)$$

فارمول حجم استوانه یی که گراف تابع $f(x)$ بالاتر از گراف

تابع $g(x)$ باشد:

$$V = \int_a^b \pi (y_1^2 - y_2^2) dx = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx$$



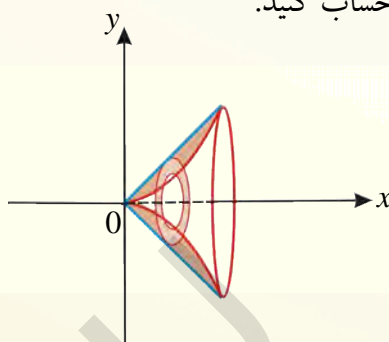
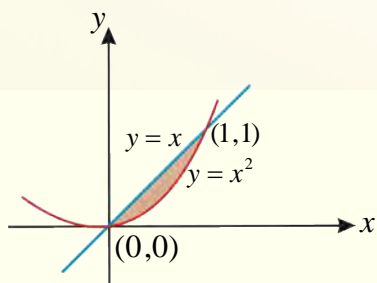
فارمول حجم استوانه‌یی که گراف تابع $g(x)$ بالاتر از گراف تابع $f(x)$ باشد، چنین است:

$$V = \int_a^b \pi(y_2^2 - y_1^2) dx = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$$

مثال: حجم جسمی را که از دوران مساحت بین منحنی $y = x^2$ و خط $y = x$ حول محور x به

وجود می‌آید حساب کنید.

حل:



$$\left. \begin{array}{l} y_1 = x^2 = f(x) \\ y_2 = x = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow y_2 > y_1, \quad g(x) > f(x)$$

$$\begin{aligned} &= \int_a^b \pi(y_2^2 - y_1^2) dx = \int_0^1 \pi(x^2 - (x^2)^2) dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\ &= \pi \left[\left(\frac{1}{3} - 0 \right) - \left(\frac{1}{5} - 0 \right) \right] = \pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right] \\ V &= \pi \left[\frac{5-3}{15} \right] = \pi \left[\frac{2}{15} \right] = \frac{2\pi}{15} \end{aligned}$$

تمرین



1- حجم جسمی را که از دوران مساحت بین منحنی تابع $y = \sin x$ و دو خط $x = 0$ و $x = \pi$ به حول محور x به وجود می‌آید، حساب کنید.

2- حجم جسمی را که از دوران مساحت بین منحنی $y = x^3$ و خط $y = 8$ و $x = 0$ حول محور y به دست می‌آید، حساب کنید.

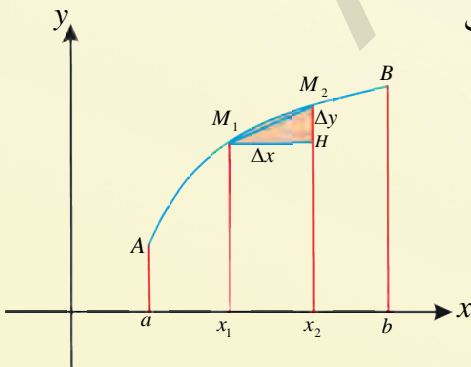
Accounting the Length of Arc

چطور می‌توانیم طول ریسمان مقابل را دریافت

کنیم؟



- بالای محور مختصات قایم منحنی تابع $y = f(x)$ را بین انتروال محصور شده $[a, b]$ در نظر گرفته و آن را \widehat{AB} بنامید، طوری که تابع در انتروال مذکور متمادی و مشتق‌پذیر باشد.
- انتروال $[a, b]$ را به سه حصه مساوی تقسیم و طول قوس مقابل x_1 و x_2 را به M_1 و M_2 نشان دهید.
- از نقطه M_1 یک قطعه خط به نقطه M_2 و یک خط دیگر به ضلع مقابل آن رسم کرده و نقطه تقاطع هر دو قطعه خط را H بنامید.
- فاصله قطعه خط M_1H را Δx و M_2H را به Δy نامگذاری و طول قوسی را که در مقابل وتر مثلث قایم الزاویه M_1HM_2 قرار دارد، با استفاده از قضیه فیثاغورث حساب کنید.
- از نتیجه فعالیت فوق می‌توان طول قوس مقابل وتر مثلث M_1HM_2 را چنین به اثبات رسانید:



ثبوت: با استفاده از مثلث قایم الزاویه M_1HM_2 داریم که:

$$(M_1M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

نظر به تعریف مشتق می‌دانیم:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{\Delta x}{\Delta t}, & g'(t) &= \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ \Delta x &= f'(t) \cdot \Delta t, & \Delta y &= g'(t) \cdot \Delta t \\ M_1 M_2 &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{[f'(t) \cdot \Delta t]^2 + [g'(t) \cdot \Delta t]^2} \\ M_1 M_2 &= \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} \cdot \Delta t \end{aligned}$$

از مجموع ریمان داریم که:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} \cdot \Delta t \\ L &= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt \end{aligned}$$

مثال: محیط دایره‌یی به معادله $x^2 + y^2 = r^2$ را محاسبه کنید.

حل: چون معادله پارامتری دایره به صورت $\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$ است؛

اگر $0 \leq t \leq \pi$ باشد، پس نصف محیط دایره را حساب می‌کنیم:

$$P = \int_0^{\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

$$x' = -r \sin t, \quad y' = r \cos t$$

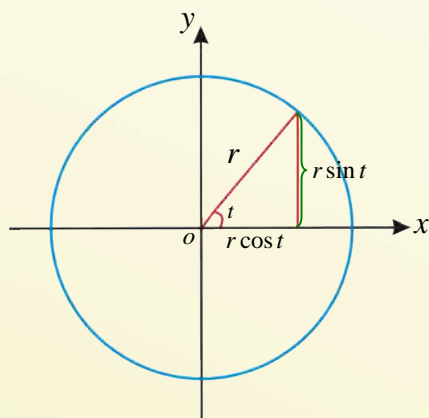
$$P = \int_0^{\pi} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt$$

$$P = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt$$

$$P = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2} dt$$

$$P = [rt]_0^{\pi} = (r \cdot \pi - r \cdot 0) = \pi r \quad \text{محیط نصف دایره}$$

$$\text{محیط کل دایره} = 2\pi r$$



یادداشت:

1- اگر معادله منحنی $y = f(x)$ در انتروال $a \leq x \leq b$ داده شده باشد، با توجه به پارامتر مانند

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \, dx \quad x \text{ طول قوس منحنی را چنین محاسبه می کنیم:}$$

مثال: طول قوس منحنی $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ را در انتروال $0 \leq x \leq 4$ حساب کنید.

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \quad \text{و} \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

حل:

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} \cdot dx \\ &= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \, dx = \int_0^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du = \frac{4}{9} \int_0^4 u^{\frac{1}{2}} du \quad u = 1 + \frac{9}{4}x \\ &= \frac{4}{9} \left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^4 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} [u^{\frac{3}{2}}]_0^4 = \frac{8}{27} [\sqrt{u^3}]_0^4 \quad du = \frac{9}{4} dx \\ &= \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3} \right]_0^4 = \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} \cdot 4\right)^3} - 1 \right] = \frac{8}{27} (\sqrt{10^3} - 1) \quad dx = \frac{4}{9} du \\ L &= \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1) \end{aligned}$$

2- اگر معادله منحنی $x = f(y)$ در انتروال $a \leq y \leq b$ داده شده باشد، با توجه به پارامتری مانند

y طول قوس منحنی را چنین محاسبه می کنیم:

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1} \, dy$$

مثال: طول قوس منحنی $x = f(y) = y^{\frac{3}{2}}$ را در انتروال $1 \leq y \leq 4$ محاسبه کنید.

حل :

$$f(y) = y^{\frac{3}{2}} \quad , \quad f'(y) = \frac{3}{2} \cdot y^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1} \, dy = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{3}{2} \cdot y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 1} \, dy$$

$$= \int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4}y + 1} \, dy = \int_1^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du$$

$$u = \frac{9}{4}y + 1$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} [u^{\frac{3}{2}}]_1^4 = \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(\frac{9}{4}y + 1\right)^3} \right]_1^4$$

$$du = \frac{9}{4} dy$$

$$= \frac{8}{27} \left[\sqrt{(10)^3} - \sqrt{\left(\frac{9}{4} + 1\right)^3} \right]$$

$$dy = \frac{4}{9} du$$

$$= \frac{8}{27} \left[\sqrt{1000} - \sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3} \right] = \frac{8}{27} \left[10\sqrt{10} - \sqrt{\frac{2197}{64}} \right]$$

تمرین



1- طول قوس منحنی $x = t^2$ و $y = t^3$ را در انتروال $1 \leq x \leq 2$ دریابید.

2- طول قوس منحنی $f(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ را در انتروال $0 \leq x \leq 1$ حساب کنید.

محاسبه مساحت محصور شده توسط یک منحنی

- انتیگرال $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ مساحت یک سطح را نمایش می‌دهد که توسط منحنی تابع $y = f(x)$ و محور x و خطوط $x = a$ ، $x = b$ محصور شده است.
- اگر تابع $f(x)$ در انتروال بسته $[a, b]$ متمادی و مثبت باشد یعنی $y = f(x) \geq 0$ در این حالت $f(x)$ همیشه در قسمت بالایی محور x قرار دارد و اگر $y = f(x) \leq 0$ باشد در این حالت $f(x)$ در قسمت پایینی محور x قرار دارد و انتیگرال آن منفی است.

محاسبه مساحت محصور شده توسط دو منحنی

- اگر گراف تابع $f(x)$ بالاتر از گراف تابع $g(x)$ قرار داشته باشد داریم که:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

- اگر گراف تابع $g(x)$ بالاتر از گراف تابع $f(x)$ قرار داشته باشد داریم که:

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

محاسبه حجم اجسام دورانی:

- هرگاه مساحت منحنی تابع متمادی $y = f(x)$ توسط خطوط $x = a$ و $x = b$ محصور شده باشد؛ جسمی که از دوران مساحت بین منحنی تابع فوق حول محور x به وجود می‌آید، تقریباً استوانه‌یی شکل می‌باشد. که ارتفاع آن $\Delta x = b - a$ است و سطح این استوانه توسط سطوح دایروی شکل محصور گردیده که این سطوح را مقطع گویند ما می‌دانیم که مساحت دایره نظر به محور x ، $A(x) = \pi r^2$ و شعاع این مقطع موازی به محور y است؛ بنابراین $y = r$ می‌شود و فارمول حجم این جسم نظر به مجموع ریمان به طور زیر به دست می‌آید:

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x) \Delta x = \int_a^b \pi r^2 dx = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

- اگر مساحت منحنی تابع $x = f(y)$ توسط خطوط $y = c$ و $y = d$ محصور شده باشد؛ مساحت مقطع چنین استوانه‌یی نظر به محور y ، $A(y) = \pi r^2$ و ارتفاع آن $\Delta y = d - c$ و شعاع آن $x = r$ می‌باشد. حجمی که از دوران این مساحت به دست می‌آید، چنین است:

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(y) \Delta y = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_a^b [f(y)]^2 dy$$

محاسبه طول قوس:

فارمول محاسبه طول قوس: $L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad (1)$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(y)} dy \quad (2)$$

تمرینات عمومی فصل ششم

- 1- مساحت سطح محصور بین منحنی $y^2 - x - 5 = 0$ و محور y را محاسبه کنید.
- 2- مساحت سطحی را که بین منحنی $y = \sin x$ و محور x در انتروال $[0, 2\pi]$ محصور شده دریافت کنید.
- 3- مساحت سطح محصور شده توسط منحنی‌های $y = x^2 - 2x$ و $y = 6x - x^2$ را حساب کنید.
- 4- مساحت سطح محصور شده توسط منحنی با معادله $y = -x^2 + 4x - 3$ و محور x را دریابید.
- 5- مساحت سطح محصور شده توسط منحنی‌های $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ و $y = x^2 - 4x$ را حساب کنید.
- 6- حجم جسمی را که از دوران سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y = \sin x - \cos x$ در انتروال $x = 0$ و $x = \frac{\pi}{2}$ حول محور x به وجود می‌آید، حساب کنید.
- 7- حجم جسمی را که از دوران منحنی تابع $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ و محور x در انتروال $[0, 4]$ به وجود می‌آید، دریابید.
- 8- حجم جسمی را که از دوران سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y = x^2$ و دایره $x^2 + y^2 = 2$ حول محور x به وجود می‌آید، حساب کنید.
- 9- حجم جسمی را که از دوران خط $y = \frac{1}{2}x + 1$ و محور x در انتروال $[2, 6]$ به دست می‌آید محاسبه کنید.
- 10- طول قوس منحنی تابع $y = -x + 4$ را در انتروال $-2 \leq x \leq 2$ محاسبه کنید.
- 11- طول قوس تابع $y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$ را در انتروال $2 \leq x \leq 5$ حساب کنید.

فصل هفتم احصائیه

ما همه افغانيم.

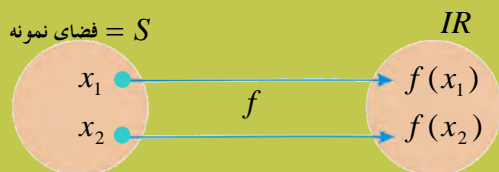


تابع توزیع احتمال

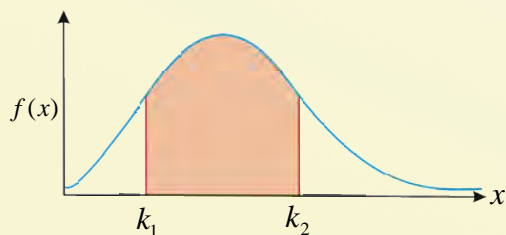
کلمه‌هایی مانند تجربه تصادفی، فضای

نمونه و متحول تصادفی چه چیزی را در

ذهن شما زنده می‌کند؟



- متحول تصادفی که در احصائیه و احتمالات از آن استفاده می‌کنید، چه تفاوتی با متحولی که در الجبر آن را خوانده اید، دارد؟
- اگر x_1, x_2, \dots, x_n عناصر یک ست باشند و تابع $P(X = x_i) = f(x_i)$ را داشته باشیم، جوهره‌های مرتبی را که توسط تابع فوق به دست می‌آید، بنویسید.
- با توجه به شکل زیر، مساحت محصور شده بین دو مقدار k_1 و k_2 و تحت منحنی $f(x)$ را به صورت انتیگراال ارائه کنید.



- با در نظر داشت جدول زیر مجموعه $[E(x = x_i)] = \sum_{i=1}^2 x_i f(x_i)$ ، $[x_i - E(x_i)]^2$ و $[x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$ را به دست آرید.

x_i	0	1
$f(x_i)$	0.5	0.5

از فعالیت فوق به نتایج زیر دست می یابیم که:

- تابع توزیع احتمال که در احصائیه و احتمالات مورد بحث قرار می گیرد، عبارت از تابع است. که ناحیه تعریف آن فضای نمونه و ناحیه قیمت های آن اعداد حقیقی است.
- اگر $P(X = x_i) = f(x_i)$ داشته باشیم در این صورت جوردهای مرتب $[x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)], \dots, [x_n, f(x_n)]$ را تابع احتمال مجزا (گسسته) می گویند.
- تابع احتمال پیوسته و تجمعی را می توان به شکل $F(x) = P(X \leq x)$ ارائه نمود.
- اگر $f(x)$ تابع احتمال و x متحول تصادفی باشد، در این صورت احتمال اینکه x بین k_1 و k_2 قرار گیرد برابر است با:

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x) dx$$

- اگر x متحول تصادفی پیوسته و $k_1 < k_2$ باشد در این صورت:
- $$P(k_1 \leq x \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$
- اگر x متحول تصادفی گسسته باشد، در این صورت اوسط (Expected Value) یک متحول تصادفی x که به $E(x)$ نشان داده می شود برابر است با:

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$$

$E(x)$ اوسط x نامیده می‌شود که آن را با \bar{x} نمایش می‌دهیم و همچنان اگر x متحول تصادفی گسسته باشد، در این صورت وریانس x که به شکل S^2 نمایش داده می‌شود مساویست با:

$$S^2 = \sum_{i=1}^n [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

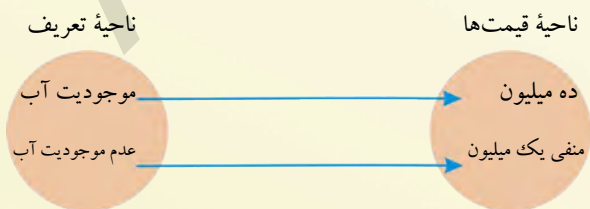
مثال: یک شرکت خصوصی می‌خواهد یک چاه آب را در روی یک تپه حفر نماید، هزینه این کار یک میلیون افغانی تمام می‌شود. اگر چاه حفر شده آب بدهد، صاحب شرکت ده میلیون افغانی مزد می‌گیرد اما در غیر این صورت یک میلیون افغانی بابت حفر چاه ضرر خواهد کرد.

الف: این موضوع را به صورت یک تابع ارائه کنید.

ب: اگر احتمال اینکه چاه حفر شده آب بدهد 0.2 و احتمال نرسیدن به آب 0.8 باشد در این صورت تابع احتمال، اوسط (*Expected Value*)، وریانس و انحراف معیار متحول تصادفی x را دریافت کنید.

حل:

الف: دیاگرام زیر نشان دهنده توزیع تابع احتمال است:



ب: چگونه گی محاسبه تابع احتمال، اوسط متحول تصادفی x ، وریانس و انحراف معیار متحول تصادفی در جدول زیر نشان داده شده است:

متحول تصادفی	تابع احتمال	اوسط	انحراف مربعات متحول تصادفی از اوسط خود	واریانس	انحراف معیار
x_i	$f(x_i)$	$E(x) = \sum x_i f(x_i)$	$[x_i - E(x)]^2$	$S^2 = [x_i - E(x)]^2 f(x_i)$	S
-1	0.8	$-1 \cdot 0.8 = -0.8$	$(-1 - 1.2)^2 = 4.84$	$4.84 \cdot 0.8 = 3.872$	4.4
10	0.2	$10 \cdot 0.2 = 2$	$(10 - 1.2)^2 = 77.44$	$77.44 \cdot 0.2 = 15.488$	
	0.1	1.2		$\sum S^2 = 19.360$	

آزمایش برنولی و توزیع دو جمله‌یی



یک شرکت کننده در امتحان کانکور از جمله 160 سوال، 100 سوال آن را حل می‌کند. به نظر شما این شرکت کننده کامیاب می‌شود یا بی نتیجه می‌ماند؟

توزیع احتمال دو جمله‌یی، یک توزیع گسسته است که برای توصیف حوادث مختلف به کار می‌رو، زیرا بیشتر اتفاقاتی که در دنیا رخ می‌دهد، دو حالت دارد.



از شرایط آزمایش حوادث زیر چه نتایجی را می‌توان به دست آورد؟

- چند مرتبه دو سکه انداخته شود تا همزمان هر دو سکه شیر بیاید؟
 - چند مرتبه دو تاس انداخته شود که مجموع شماره‌های آنها کوچکتر از 7 شود؟
 - چند بار گرفتن یک مهره از جعبه‌یی که حاوی مهره‌های سیاه و سفید است، صورت گیرد تا مهره گرفته شده سفید باشد؟ (لبته مهره گرفته شده هر بار به جعبه انداخته شود).
 - اگر در انتخاب m کامیابی از n آزمایش ($m < n$) ترتیب آنها مهم نباشد، این انتخاب را به نام چه یاد می‌کنند؟ فورمول آن را بنویسید.
 - اگر احتمال m اشکال کامیابی (موفقیت) از n آزمایش را به P ، و احتمال $n - m$ اشکال ناکامی (شکست) از این آزمایش را به q نشان دهیم، پس احتمال m کامیابی در هر یک از این n اشکال آزمایش چند خواهد بود؟
 - شاگردی با 5 امتحان 4 جوابه روبه‌رو می‌شود. او به طور تصادفی به سوالات جواب می‌دهد. فرض کنید موفقیت (جواب درست) با T و عدم موفقیت (جواب نادرست) با حرف F نمایش داده شود. در این صورت، احتمال هر یک جواب درست و نادرست چند خواهد بود؟
- از فعالیت بالا فهمیده می‌شود که آزمایش برنولی یک آزمایش تصادفی است که نتیجه آن را می‌توان به دو حالت کامیابی و ناکامی دسته بندی کرد.

توزیع برنولی را می‌توان به صورت $P(X = m) = P^m (1 - P)^{1-m} = P^m \cdot q^{1-m}$ نشان داد. درحالی‌که P احتمال کامیابی و $q = 1 - P$ احتمال عدم کامیابی می‌باشد، هرگاه یک آزمایش را n دفعه تکرار کنیم، یک ترادف به دست می‌آید طوری که اگر احتمال کامیابی هر آزمایش P و احتمال ناکامی آن q باشد، احتمال m کامیابی در این n آزمایش عبارت است از:

$$P(X \leq m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m} \quad 0 \leq m \leq n$$

رابطه فوق را می‌توان به صورت $B(m, n, p)$ نیز ارائه کرد.

با در نظر داشت فرمول فوق، می‌توان اوسط توزیع دوجمله‌یی را به صورت $\bar{x} = np$ و انحراف معیاری این توزیع را به صورت $S = \sqrt{npq}$ ارائه نمود.

مثال 1: احتمال شفا یافتن یک مریض از مرض شکر 0.4 است در صورتی که 15 نفر به این مرض مصاب باشند، چقدر احتمال دارد که صرف 5 نفر شفا یابند و همچنان دریاید احتمال اینکه 3 الی 4 نفر از آنها شفا یابد.

حل: چون $n = 15$, $m = 5$, $q = 1 - P = 0.6$, $P = 0.4$ بنابر این:

$$\begin{aligned} P(m = 5) &= \binom{n}{m} P^m \cdot q^{n-m} = \binom{15}{5} (0.4)^5 (0.6)^{10} \\ &= \frac{15!}{5!(15-5)!} \cdot 0.01024 \cdot 0.00604661760 = \frac{360360}{120} \cdot 0.00006191 \\ &= \frac{22.312554264}{120} = 0.1859 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(3 \leq m \leq 4) &= \sum_{i=3}^4 \binom{15}{i} (0.4)^i (0.6)^{15-i} = \binom{15}{3} (0.4)^3 (0.6)^{15-3} + \binom{15}{4} (0.4)^4 (0.6)^{15-4} \\ &= \frac{15!}{3!(15-3)!} (0.064)(0.0021767823) + \frac{15!}{4!(15-4)!} (0.0256)(0.0036279706) \\ &= \frac{2730}{6} (0.0001393141) + \frac{3270}{24} (0.000092876) \\ &= \frac{0.380327493}{6} + \frac{3.04261776}{24} = 0.0633879155 + 0.12677574 \end{aligned}$$

$$P(3 \leq m \leq 4) = 0.19$$

تمرین

1- در یک قریه 200 خانواده سکونت دارند که هر کدام دارای 4 طفل می‌باشند، دریافت کنید احتمال اینکه:

- حداقل یک پسر داشته باشند.
- تنها دو پسر داشته باشند.
- یک یا دو دختر داشته باشند.

توزیع احتمال پواسن

$$1) b(x, n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

اگر در توزیع دوجمله‌ای قیمت P به طرف صفر و

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} b(x, n, p) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

قیمت n به طرف لایتناهی تقرب کند توزیع دو جمله -

بی مساوی به چی می شود؟

$$3) P(x, \lambda) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$



اگر $n = 5$, $p = 0.1$ و $m = 2$ باشد، قیمت‌های $P(X = m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}$ را در حالی که

$\lambda = np$ و قیمت‌های $P(X = m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m}$ باشد، محاسبه و قیمت‌های توابع فوق را

مقایسه کنید و بگویید طرز محاسبه کدام یک از فورمول‌های فوق ساده‌تر است؟

فورمول پواسن می‌تواند برای محاسبه تقریبی m اشکال کامیابی از n آزمایش، وقتی که n بزرگ

و احتمال کامیابی P کوچک باشد مورد استفاده قرار گیرد.

فورمول پواسن برای محاسبه تقریبی احتمال m اشکال در n آزمایش عبارت است از:

$$P(X = m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}$$

که در آن $\lambda = np$ و $e = 2.71828$ می‌باشد.

به خاطر داشته باشید که هم اوسط و هم وریانس توزیع پواسن برابر λ است.

مثال: به تعداد 200 مسافر تکت یک هواپیما را گرفته اند. اگر احتمال نیامدن مسافری که تکت گرفته، طبق تجارب گذشته 0.01 باشد احتمال اینکه 3 مسافر نیابند چقدر است؟

حل: در این مسأله «نیامدن» کامیابی است و همچنان مشاهده می شود که $n = 200$ به اندازه کافی بزرگ و $p = 0.01$ یعنی احتمال کامیابی به اندازه کافی کوچک است؛ بنابراین داریم:

$$P(X = m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!} \quad \lambda = n p = 200 \cdot 0.01 = 2$$

$$P(3) = \frac{(2.71828)^{-2} \cdot 2^3}{3!} = \frac{1}{(2.71828)^2} \cdot 8 = \frac{1}{7.3890461584} \cdot 8$$

$$= \frac{0.13533 \cdot 8}{6} = \frac{1.08268}{6} = 0.1804$$

حال اگر این احتمال را توسط فورمول دو جمله‌ی محاسبه نماییم، داریم:

$$P(X = m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m}$$

$$\left. \begin{array}{l} n = 200 \\ p = 0.01 \end{array} \right\} \Rightarrow q = 0.99$$

$$P(3) = P(X = 3) = \binom{200}{3} (0.01)^3 (0.99)^{200-3}$$

$$= \frac{200!}{3! \cdot 197!} (0.01)^3 (0.99)^{197} = 0.1814$$

طوری که دیده می شود، دو جواب تقریباً معادل یکدیگر اند. واضح است که محاسبه احتمال به وسیله فورمول پواسن ساده تر است.

یادداشت: فورمول پواسن را برای محاسبه احتمال تعداد مراجعات در یک زمان مشخص می توان به صورت زیر ارائه کرد:

$$P(X = m) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^m}{m!}$$

در این فورمول t نسبت زمان عنوان شده به کل زمانی که اوسط برای آن داده شده است. m تعداد مراجعه در t واحد زمان است.

λ اوسط تعداد مراجعه ها در واحد زمان است.

مثال: اگر تعداد مراجعین یک بانک به طور متوسط در یک ساعت 60 نفر باشد، احتمال اینکه چهار نفر در سه دقیقه اول به بانک مراجعه کنند، چقدر است؟
حل:

$$\lambda = 60, \quad t = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$$

$$m = 4, \quad \lambda t = 60 \cdot \frac{1}{20} = 3$$

$$P(m = 4) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^m}{m!} = \frac{e^{-3} (3)^4}{4!} = \frac{(2.71828)^{-3} (3)^4}{4!} = \frac{1}{(2.71828)^3} \cdot 81$$

$$= \frac{1}{20.0854} \cdot 81 = \frac{4.03278}{24} = 0.168032$$



1- ماشینی که تولیدکننده پیچ است، یک درصد از پیچ‌های تولید شده اش ناقص می‌باشد. احتمال آنکه در یک جعبه 200 تایی از این نوع پیچ، هیچ پیچ ناقصی وجود نداشته باشد، چقدر است؟

2- یک مغازه 1000 بوتل آب معدنی استحصال نموده است. احتمال آن که در صورت انتقال، بوتل‌های شکسته ظاهر شود مساوی به 0.003 است. این احتمال را در صورتی دریافت کنید که مغازه بوتل‌های شکسته را طور زیر به دست آورد:

a- مساوی 2

b- کوچک‌تر از 2

c- بزرگ‌تر از 2

d- حد اقل یکی از آن‌ها شکسته باشد.

توزیع نورمال

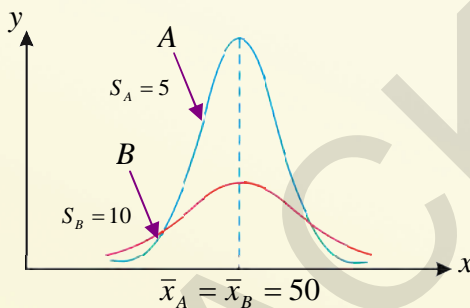
- می‌دانیم که شکل منحنی نورمال متناظر و شبیه یک زنگوله است.

- در یک منحنی نورمال شاخص‌های مرکزی و پراکنده‌گی (اوسط و انحراف معیاری) چه نوع موقعیتی را گرفته می‌توانند؟

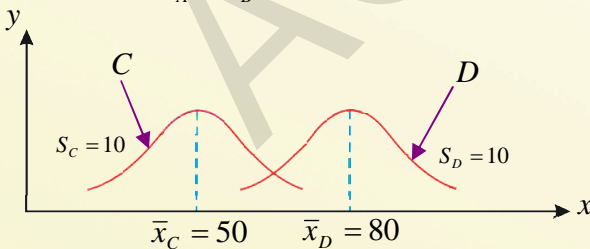


توزیع‌های نورمال مختلف دارای اوسط و انحراف معیاری مختلف اند.

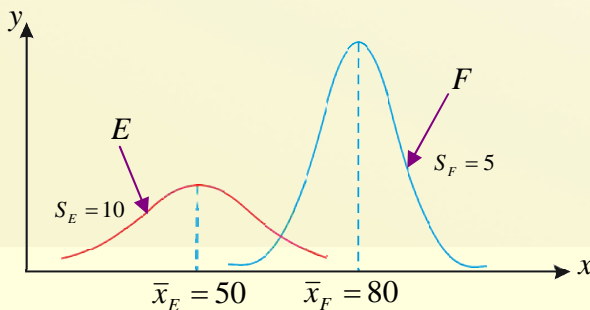
چند توزیع نورمال با اوسط و انحراف معیاری مختلف مانند اشکال زیر داده شده است:



شکل الف



شکل ب



شکل ج

اجرای فعالیت زیر را با استفاده از اشکال فوق به طور شفاهی بیان کنید:

- در شکل الف توزیع متحول تصادفی A و B دارای چه نوع اوسط و انحراف معیاری می‌باشند؟

- در شکل ب توزیع C و D دارای چه نوع انحراف معیاری و اوسط هستند؟

- در شکل ج، توزیع‌های E و F دارای کدام نوع اوسط و انحراف معیاری می‌باشند؟

از انجام فعالیت فوق نتیجه زیر به دست می‌آید:

منحنی‌های توزیع نورمال می‌توانند به چهار طریق با یکدیگر تفاوت داشته باشند. شکل ریاضی معادله توزیع نورمال که نشان‌دهنده تابع توزیع احتمال آن $f(x)$ است، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

$$f(x) = N(x, \bar{x}, s) \quad \text{و یا}$$

در حالی که e عدد ثابت 2.71828 و π عدد ثابت 3.14189 است، \bar{x} اوسط، s انحراف

معیار و x مقادیر متحول تصادفی پیوسته و $f(x)$ ارتفاع منحنی را نشان می‌دهد.

توزیع نورمال از جمله توزیع‌های پیوسته است. اختلاف در اندازه‌گیری‌ها را می‌توان توسط

توزیع نورمال به خوبی تقرب نمود.

مثال (آلوده گی موترها):

ماشین موترها به هنگام سوزاندن تیل، مقداری آلوده گی از خود انتشار می دهند. آلوده گی های خارج شده از ماشین 46 موتر، توسط شخصی به نام لورنزن در سال 1980 بررسی شده است.

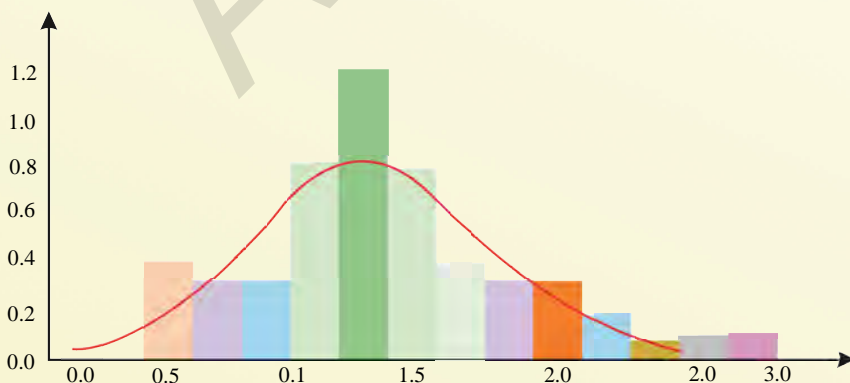
یک دسته از آلوده گی ها شامل اکساید های نایتروجن است.

گراف مستطیلی زیر، میزان اکساید نایتروجن (بر حسب گرام فی میل) این 46 موتر را همراه با تابع توزیع احتمال نورمال با اوسط و وریانس به دست آمده از نمونه یی که به وسیله شخص مذکور گزارش شده است، نشان می دهد. مساحت ستون های این گراف مستطیلی متناسب است با تعداد 46 نمونه اندازه گیری یی که بین نقاط افقی این ستون ها قرار گرفته اند.

به طور مثال، ستون چهارم (که از 1 تا 1.2 روی محور افقی قرار دارد) دارای

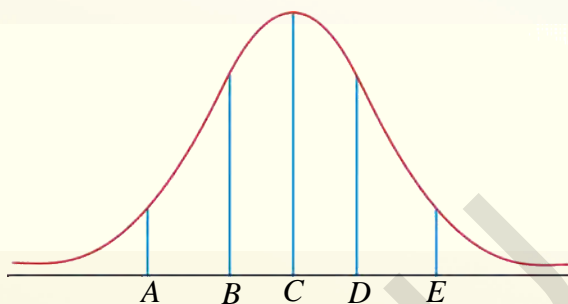
مساحت $0.174 = 0.870 \cdot 0.2$ است که برابر $\frac{4}{46}$ می باشد. زیرا 8 دیتا بین 1 تا 1.2 قرار

دارند.



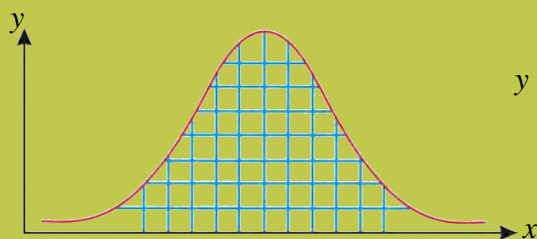


شکل زیر را در نظر بگیرید. موقعیت نقاط A, B, C, D و E را از جنس اوسط و انحراف معیار
ارائه کنید؟



مساحت تحت منحنی توزیع نورمال و استاندارد کردن آن

شکل مقابل را در نظر بگیرید:



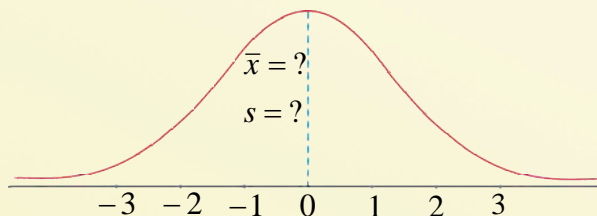
برای محاسبه مساحت تحت منحنی $y = f(x)$

چه نوع روشی را پیشنهاد می کنید؟



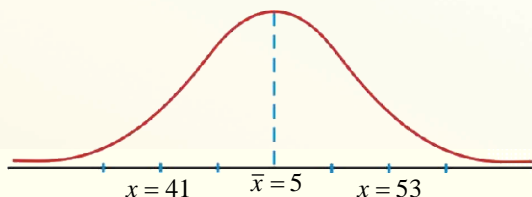
فعالیت

- اگر متحول تصادفی پیوسته x دارای توزیع احتمال نورمال با اوسط \bar{x} و انحراف معیاری s باشد، احتمال اینکه این متحول تصادفی کمیت بین x_1 و x_2 را اختیار کند، به شکل انتیگرال بنویسید.
- آیا محاسبه انتیگرال شکل ریاضی توزیع احتمال نورمال کار ساده‌ی است؟
- هرگاه متحول تصادفی نورمال x را به صورت $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ بنویسیم، تابع توزیع احتمال $f(x)$ مساوی با چیست؟
- گفته می‌توانید که اوسط و انحراف معیاری شکل زیر مساوی با کدام اعداد است؟



- شکل زیر به قیمت‌های $x = 41$ و $x = 53$ به صورت نورمال با اوسط $\bar{x} = 50$ و انحراف معیار

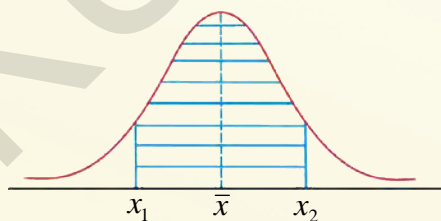
$$s = 5 \text{ نشان داده شده است، قیمت‌های } z = \frac{x - \bar{x}}{s} \text{ را به دست آرید؟}$$



از فعالیت بالا نتیجه می‌شود که:

برای محاسبه احتمال اینکه متحول تصادفی پیوسته x کمیت بین x_1 و x_2 را اختیار کند قاعدتاً باید از تابع توزیع احتمال x انتیگرال گرفت و سطح زیر منحنی را در فاصله x_1 تا x_2 به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} f(x_1 < x < x_2) &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} N(x, \bar{x}, s) dx \end{aligned}$$



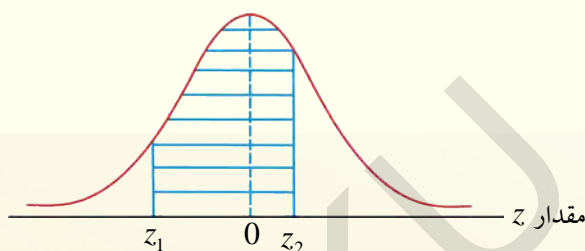
متأسفانه محاسبه توزیع احتمال نورمال کار ساده‌یی نیست و برای محاسبه سطح زیر منحنی توزیع‌های نورمال، ضرورت به تهیه یک جدول طولانی است که عملاً این کار مشکل می‌باشد. اما خوشبختانه می‌توان مشکل تهیه جدول را به وسیله معیاری ساختن دیتای احصائیوی حل کرد. بدین معنی که می‌توان قیمت‌های مربوط به متحول تصادفی x را که دارای توزیع نورمال است، توسط رابطه زیر معیاری نمود.

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

در اینجا z را به نام متحول معیاری نورمال و منحنی را به نام منحنی نورمال معیاری شده یا منحنی احتمال نورمال یاد می‌کنند.

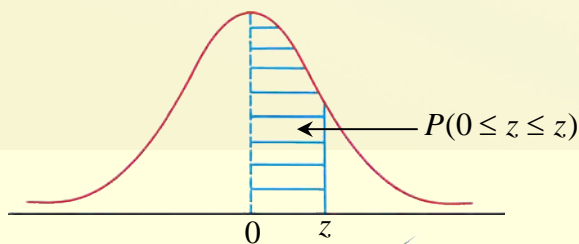
به خاطر داشته باشید که متحول معیاری شده z همیشه دارای اوسط صفر و انحراف معیار 1 می باشد. همچنان مساحت بین منحنی نورمال و محور افقی، برابر با واحد انتخاب شده می باشد. مساحت زیر قسمتی از یک منحنی احتمال نورمال با احتمال تناسب مستقیم داشته و می توان آن را با تعویض $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ به صورت زیر نشان داد:

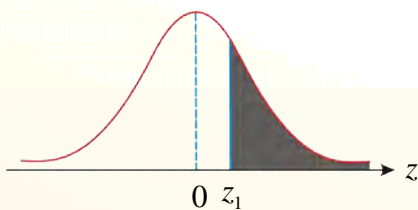
$$f(z_1 < z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{z_1}^{z_2} N(z, 0, 1) dz$$



مساحت تحت منحنی متحول x که بین $x = x_1$ و $x = x_2$ قرار دارد، مساوی است با مساحت منحنی متحول z که بین $z = z_1$ و $z = z_2$ محصور می باشد. در نتیجه با داشتن جدول توزیع نورمال معیاری، احتمال هر توزیع نورمال را با هر قیمت ممکنه متحول تصادفی آن به دست آورده می توانیم.

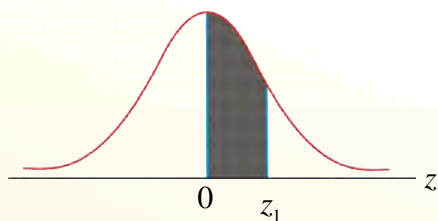
نحوه استفاده از جدول احتمال توزیع نورمال معیاری را می توان به طور مختصر توضیح نمود. جدول که در آخر این درس آمده است شامل احتمالات مربوطه به توزیع نورمال معیاری است. جدول زیر، قسمتی از جدول آخر این درس را نشان می دهد. ارقامی که در بالای جدول نوشته شده است، نشان می دهد که جدول برای قیمت های مثبت z تنظیم شده و مساحت زیر منحنی را از نقطه صفر تا z ارائه می کند.





جدول (1)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9268	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997



جدول (2)

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0/0	0/0000	0/0040	0/0080	0/0120	0/0160	0/0199	0/0239	0/0279	0/0319	0/0359
0/1	0/0398	0/0438	0/0478	0/0517	0/0557	0/0596	0/0636	0/0675	0/0714	0/0754
0/2	0/0793	0/0832	0/0871	0/0910	0/0948	0/0987	0/1026	0/1064	0/1103	0/1141
0/3	0/1179	0/1217	0/1255	0/1293	0/1331	0/1370	0/1407	0/1445	0/1483	0/1521
0/4	0/1559	0/1596	0/1634	0/1671	0/1708	0/1744	0/1781	0/1818	0/1854	0/1891
0/5	0/1928	0/1964	0/2001	0/2037	0/2072	0/2107	0/2142	0/2177	0/2211	0/2246
0/6	0/2281	0/2315	0/2349	0/2383	0/2417	0/2451	0/2484	0/2517	0/2550	0/2582
0/7	0/2615	0/2648	0/2681	0/2714	0/2746	0/2778	0/2810	0/2841	0/2874	0/2905
0/8	0/2936	0/2967	0/2998	0/3028	0/3059	0/3089	0/3119	0/3148	0/3177	0/3206
0/9	0/3235	0/3264	0/3293	0/3321	0/3349	0/3377	0/3405	0/3433	0/3461	0/3488
1/0	0/3516	0/3543	0/3569	0/3596	0/3623	0/3649	0/3675	0/3700	0/3726	0/3752
1/1	0/3778	0/3803	0/3828	0/3853	0/3878	0/3902	0/3927	0/3950	0/3974	0/3998
1/2	0/4022	0/4046	0/4069	0/4092	0/4115	0/4138	0/4161	0/4183	0/4206	0/4228
1/3	0/4250	0/4272	0/4294	0/4315	0/4337	0/4358	0/4378	0/4398	0/4418	0/4437
1/4	0/4457	0/4476	0/4495	0/4514	0/4533	0/4552	0/4570	0/4588	0/4606	0/4625
1/5	0/4643	0/4661	0/4678	0/4695	0/4713	0/4730	0/4747	0/4764	0/4781	0/4798
1/6	0/4815	0/4831	0/4847	0/4863	0/4879	0/4894	0/4910	0/4925	0/4940	0/4955
1/7	0/4970	0/4984	0/4998	0/5013	0/5027	0/5041	0/5055	0/5069	0/5083	0/5098
1/8	0/5112	0/5126	0/5140	0/5154	0/5168	0/5181	0/5195	0/5208	0/5222	0/5235
1/9	0/5249	0/5262	0/5275	0/5288	0/5301	0/5314	0/5327	0/5340	0/5353	0/5365
2/0	0/5378	0/5391	0/5403	0/5415	0/5427	0/5438	0/5449	0/5460	0/5471	0/5482
2/1	0/5493	0/5504	0/5515	0/5526	0/5536	0/5546	0/5556	0/5566	0/5576	0/5586
2/2	0/5596	0/5606	0/5615	0/5625	0/5635	0/5644	0/5653	0/5662	0/5671	0/5680
2/3	0/5689	0/5698	0/5707	0/5716	0/5725	0/5734	0/5743	0/5752	0/5761	0/5770
2/4	0/5778	0/5787	0/5795	0/5804	0/5812	0/5821	0/5829	0/5837	0/5846	0/5854
2/5	0/5862	0/5870	0/5878	0/5886	0/5894	0/5902	0/5910	0/5918	0/5926	0/5934
2/6	0/5941	0/5949	0/5956	0/5964	0/5971	0/5979	0/5986	0/5993	0/6000	0/6006
2/7	0/6013	0/6020	0/6026	0/6033	0/6039	0/6045	0/6051	0/6057	0/6063	0/6068
2/8	0/6074	0/6079	0/6085	0/6090	0/6095	0/6101	0/6106	0/6111	0/6116	0/6121
2/9	0/6126	0/6131	0/6136	0/6141	0/6145	0/6150	0/6155	0/6159	0/6164	0/6168
3/0	0/6173	0/6177	0/6181	0/6185	0/6189	0/6193	0/6197	0/6201	0/6205	0/6209
3/1	0/6213	0/6217	0/6221	0/6225	0/6228	0/6232	0/6235	0/6238	0/6241	0/6244
3/2	0/6247	0/6250	0/6253	0/6256	0/6259	0/6262	0/6265	0/6268	0/6271	0/6274
3/3	0/6276	0/6279	0/6281	0/6284	0/6286	0/6288	0/6291	0/6293	0/6295	0/6297
3/4	0/6299	0/6301	0/6303	0/6305	0/6307	0/6309	0/6311	0/6313	0/6315	0/6317
3/5	0/6318	0/6320	0/6321	0/6323	0/6324	0/6325	0/6326	0/6327	0/6328	0/6329
3/6	0/6330	0/6331	0/6332	0/6333	0/6334	0/6335	0/6335	0/6336	0/6337	0/6337
3/7	0/6338	0/6338	0/6338	0/6338	0/6338	0/6338	0/6338	0/6338	0/6338	0/6338
3/8	0/6338	0/6338	0/6338	0/6338	0/6338	0/6338	0/6338	0/6338	0/6338	0/6338
3/9	0/6338	0/6338	0/6338	0/6338	0/6338	0/6338	0/6338	0/6338	0/6338	0/6338

به طور مثال؛ اگر $z = 1.56$ باشد، ابتدا سطری را پیدا کنید که در آن z معادل 1.5 است. چنانچه در طول آن سطر پیش رویم تا به ستونی برسیم که بالای آن 0.06 نوشته شده است، به عدد 0.9406 بر می‌خوریم که مربوط به سطح زیر منحنی از نقطه $z = 0$ تا $z = 1.56$ می‌باشد.

$$P(0 \leq z \leq 1.56) = 0.9406 \quad \text{بنابراین می‌توانیم بنویسیم:}$$

مثال 1: دستگاه پُرکنندهٔ بوتل‌های نوشابه طوری تنظیم شده است که 952 میلی لیتر نوشابه را به داخل بوتل می‌ریزد. این میزان نوشابه دارای توزیع نورمال با اوسط 952 میلی لیتر و انحراف معیاری 4 میلی لیتر است.

احتمال اینکه بوتل نوشابه بین 952 تا 956 میلی لیتر نوشابه داشته باشد، چقدر است؟

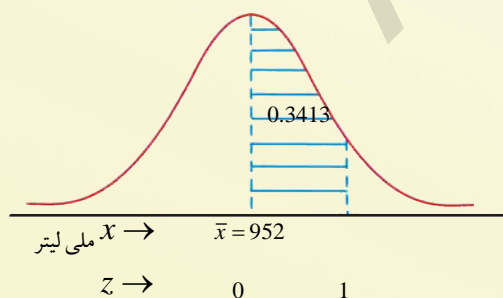
حل: ابتدا z را از جنس x دریافت می‌کنیم:

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{952 - 952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956 - 952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

بنابراین ناحیهٔ تعریف x از 952 تا 956 به ناحیهٔ تعریف z از 0 تا 1 تبدیل می‌شود.

با استفاده از جدول (2) داریم که $P(0 \leq z \leq 1) = 0.3413$ و احتمال این است که بوتل حاوی 952 تا 956 میلی لیتر نوشابه می‌باشد و یا به عبارت دیگر، 34.13 درصد بوتل‌های پُر شده دارای 952 تا 956 میلی لیتر نوشابه اند.



$$\begin{aligned} P(0 \leq z \leq 1) &= P(z_2) - P(z_1) \\ &= P(1) - P(0) \\ &= 0.8413 - 0.5000 \\ &= 0.3413 \end{aligned}$$

مثال 2: نمرات شاگردان در مضمون ریاضی، دارای توزیع نورمال با اوسط 70 و انحراف معیاری 8 است. با استفاده از جدول نورمال معیاری، فیصدی نمرات بین 54 تا 84 را به دست آرید.

حل: مسأله در شکل زیر به صورت ترسیمی نشان داده شده است:

$$z_1 = \frac{54 - 70}{8} = -2 \quad \text{برای } x = 54 \text{ داریم:}$$

$$z_2 = \frac{84 - 70}{8} = 1.75 \quad \text{برای } x = 84 \text{ داریم:}$$

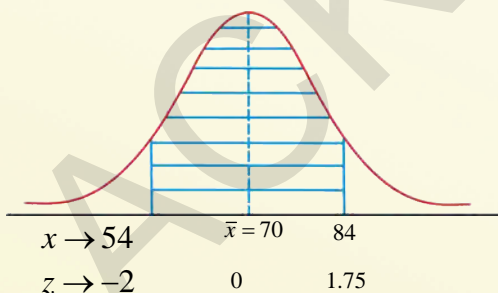
چون می‌خواهیم مساحت تحت منحنی توزیع نورمال را در یک انتروال به‌دست آوریم، از جدول (2) نورمال معیاری داریم:

$$P(-2 \leq z \leq 0) = P(0 \leq z \leq 2) = 0.4772$$

$$P(0 \leq z \leq 1.75) = 0.9599$$

مساحت سیاه شده در شکل، احتمال مورد نظر است.

$$P(0 \leq z \leq 1.75) - P(-2 \leq z \leq 0) = 0.9599 - 0.4772 = 0.4827$$

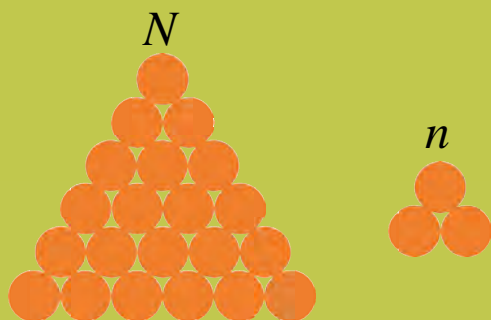


با در نظر داشت مثال 1 محاسبه کنید که چند درصد از بوتل‌ها دارای 948 تا 956 ملی لیتر نوشابه اند.

نمونه گیری

ضرب المثل «مشت نمونه خروار است» را چگونه

تفسیر می کنید؟



$$N = \text{جامعه} \Rightarrow n = ?$$



فعالیت

- اگر بخواهید قد شاگردان صنف 12 افغانستان را اندازه گیری نمایید، برای این کار چه روشی را پیشنهاد می کنید؟
 - نمونه به دو دسته تقسیم می شود؛ نمونه ساده و نمونه تصادفی، شما کدام یک از این نمونه ها را ترجیح می دهید؟ چرا؟
 - دلایل گوناگونی برای توجیه عمل نمونه گیری وجود دارد آیا می توانید یک یا دو دلیل آن را بیان کنید؟
 - آیا ویژگی های عددی مانند اوسط و انحراف معیاری که در توزیع جامعه و توزیع نمونه استفاده می شوند یکسان اند؟
 - آیا تفاوتی بین نتیجه نمونه گیری و مقادیر مشاهده شده متحول های تصادفی وجود دارد؟
- از فعالیت بالا دانسته می شود که روش های گوناگونی برای نمونه گیری وجود دارد:
- نمونه گیری تصادفی: وقتی عناصر جامعه همه برای انتخاب شدن هم چانس باشند.
 - نمونه گیری سیستماتیک: وقتی عناصر جامعه به صورت منظم شماره (Code) گذاری شده باشند.
 - نمونه گیری طبقه بندی: وقتی جامعه به گروه های متجانس تقسیم شده باشند.
 - نمونه گیری خوشه بندی: اگر جامعه خیلی بزرگ باشد، آن را به خوشه های مختلف تقسیم و از هر خوشه نمونه بی را انتخاب می کنند.
 - هر ویژگی عددی یک جامعه (اوسط و انحراف معیار) را پارامتر جامعه می گویند.

- هر ویژگی عددی یک نمونه (اوسط و انحراف معیاری) را آمار می گویند.
 - نتیجه نمونه گیری را به عنوان قیمت های مشاهده شده متحول های تصادفی در نظر بگیرید.
 - متحول های تصادفی x_1, x_2, \dots, x_n را یک نمونه تصادفی از متحول تصادفی x می گویند اگر تابع مربوط آن به صورت $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \dots f(x_n)$ تعریف شده باشد.
- مثال:** فرض کنید یک قوطی دارای 5 گلوله سفید و 7 گلوله سیاه است. از داخل قوطی 5 گلوله را یک یک و با جاگزینی (انتخاب دوباره یک عنصر مجاز باشد) انتخاب می کنیم.

نمونه تصادفی انتخاب شده را به زبان متحول های تصادفی بیان کنید و توزیع مربوطه آن ها را بیابید.

حل: سه متحول تصادفی x_1, x_2 و x_3 را در نظر بگیرید. متحول تصادفی x_1 عدد صفر را برای انتخاب گلوله سیاه در مرحله اول و عدد یک را برای انتخاب گلوله سفید در مرحله اول، اختیار می کند. متحول x_2 نیز عدد صفر را برای انتخاب گلوله سیاه در مرحله دوم و عدد یک را برای انتخاب گلوله سفید در مرحله دوم اختیار می کند. همچنین متحول تصادفی x_3 نیز عدد صفر را برای انتخاب گلوله سیاه در مرحله سوم و عدد یک را برای انتخاب گلوله سفید در مرحله سوم اختیار می کند. در این صورت هر یک از متحول های تصادفی x_1, x_2 و x_3 یک متحول تصادفی برنولی است.

$$f(x_i) = \left(\frac{5}{12}\right)^{x_i} \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-x_i} \quad x_i = 0, 1 \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{داریم:} \quad p = \frac{5}{12} \quad \text{پارامتر}$$

چون نمونه گیری تصادفی است، پس متحول های تصادفی x_1, x_2 و x_3 مستقل از یکدیگر اند، بنابراین

$$f(x_1, x_2, x_3) = P(x_1 = x_1, x_2 = x_2, x_3 = x_3) \quad \text{تابع مربوطه عبارت است از:}$$

به خاطر داشته باشید که هر تابع از عناصر نمونه تصادفی را که به پارامترهای مجهول بسته گی نداشته باشد، آماره می گویند.

تمرین

- 1- اگر حجم جامعه $N = 25$ باشد و بخواهیم نمونه تصادفی 5 تایی از آن انتخاب کنیم، تعداد نمونه های به دست آمده چند خواهد بود؟
- 2- نمونه ساده و نمونه تصادفی را با مثال بیان کنید.
- 3- فرض کنید از جامعه نمونه تصادفی برداشته ایم، با این نمونه چه باید بکنیم؟

توزیع اوسط نمونه

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = ?$$

دولت می خواهد بداند که درآمد متوسط افراد یک شهر بزرگ چقدر است؟ برای این منظور، نمونه تصادفی انتخاب و اوسط نمونه محاسبه می شود. حال باید از روی این مقدار محاسبه شده، کدام کمیت را تخمین کرد؟



- دیتای جدول زیر، نتیجه مسابقه ورزشی سه شاگرد را نشان می دهد.

نام	داود	سلیمان	پژواک
نمره	2	3	4

- توزیع احتمال نمرات را بنویسید.
 - اوسط و انحراف معیار نمرات شاگردان را حساب کنید.
 - نمرات داده شده را به صورت جوهره های مرتب (نمونه های دوتایی ممکن با جای گزینی) ارائه و با اوسط هر یک از نمونه ها به شکل جدول نشان دهید.
 - جدول توزیع احتمال اوسط نمونه ها (جدول توزیع کثرت \bar{x}) را بنویسید.
 - گراف مستطیلی جدول کثرت \bar{x} را ترسیم کنید.
 - اوسط متحول \bar{x} را با اوسط نمرات شاگردان مقایسه کنید.
- از فعالیت بالا نتیجه زیر به دست می آید:

اگر x_1, x_2, \dots, x_n یک نمونه تصادفی از جامعه تابع احتمال $f(x)$ باشد، در این صورت توزیع احتمال نمونه تصادفی عبارت است از:

x	x_1	x_2, \dots, x_n
$f(x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n} \dots \frac{1}{n}$

$$E(\bar{x}_n) = \mu \quad \text{اوسط متحول } \bar{x}_n$$

$$V(\bar{x}_n) = \frac{1}{n} \delta^2 \quad \text{وریانس متحول } \bar{x}_n$$

$$S_n^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{وریانس نمونه}$$

$$E(S^2) = \delta^2 \quad \text{اوسط وریانس نمونه}$$

در حالی که $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ اوسط نمونه، μ اوسط جامعه، δ^2 وریانس جامعه و S^2 وریانس نمونه اند.

مثال: از جامعه زیر، تمام نمونه‌های تصادفی دوتایی ممکن را با جای‌گزینی انتخاب می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1}{3}, \quad x = 1, 2, 3$$

الف: توزیع احتمال x را بنویسید.

ب: اوسط و وریانس جامعه را حساب کنید.

ج: جدول توزیع \bar{x} را تشکیل و گراف مستطیلی \bar{x} را رسم کنید.

د: $E(\bar{x})$ و $V(\bar{x})$ را حساب کنید.

حل:

x	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

الف:

ب:

$$\mu = E(x) = \sum_{x=1}^3 x f(x) = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3) = 2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=1}^3 x^2 f(x) = \frac{1}{3}(1^2 + 2^2 + 3^2) = \frac{14}{3}$$

$$\delta_x^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{14}{3} - 2^2 = \frac{2}{3}$$

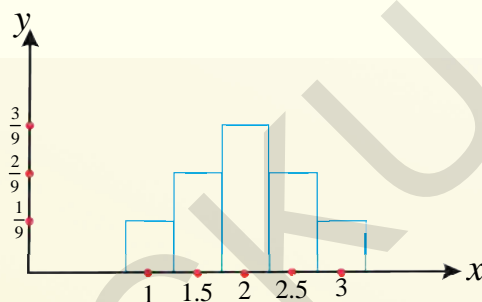
ج: جدول زیر، تمام نمونه‌های دوتایی ممکن با جاگزینی و اوسط هر یک را نشان می‌دهد:

نمونه	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
\bar{x}	1	1.5	2	1.5	2	2.5	2	2.5	3

جدول توزیع کثرت \bar{x} به صورت زیر ارائه می‌شود.

\bar{x}	1	1.5	2	2.5	3
$f(\bar{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

گراف مستطیلی \bar{x} به صورت زیر رسم می‌شود.



د:

$$\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = \sum \bar{x}f(\bar{x}) = 1 \cdot \frac{1}{9} + 1.5 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 2.5 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$E(\bar{x}^2) = \sum \bar{x}^2 f(\bar{x}) = 1^2 \cdot \frac{1}{9} + (1.5)^2 \cdot \frac{2}{9} + 2^2 \cdot \frac{3}{9} + (2.5)^2 \cdot \frac{2}{9} + 3^2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{13}{3}$$

$$\delta_{\bar{x}}^2 = V(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - (E(\bar{x}))^2 = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$$

$$E(x) = E(\bar{x}) = 2$$

$$V(\bar{x}) = \frac{\delta_x^2}{n} = \frac{\frac{1}{3}}{3} = \frac{1}{9}$$

طوری که دیده می‌شود:



1- فرض کنید جامعه‌ی متشکل از چهار عدد 2, 4, 6 و 8 باشد، در این صورت: توزیع، اوسط و واریانس این جامعه را محاسبه کرده و سپس از این جامعه نمونه تصادفی دوتایی با جای‌گزینی انتخاب و توزیع اوسط نمونه یعنی \bar{x} را به دست آرید گراف چند ضلعی کثرت آن را ترسیم و اوسط و واریانس \bar{x} را حساب کنید؟

ACKU

قضیه لیمت مرکزی

می دانیم که کمیت جامعه را پارامتر جامعه و کمیت نمونه را اوسط نمونه می گویند. آماره نمونه های \bar{x} و $S_{\bar{x}}$ اطلاعات درباره کدام پارامترها را در اختیار ما می گذارد؟

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = ?$$



- اگر حجم جامعه بزرگ را به $\frac{S}{\sqrt{n}}$ و حجم جامعه کوچک را به $\frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ (در حالی که N تعداد عناصر جامعه، n تعداد عناصر نمونه و S انحراف معیار باشند) نشان دهید، چه وقت حجم جامعه بزرگ می تواند مساوی با حجم جامعه کوچک شود؟
- اگر x_1, x_2, \dots, x_n دارای توزیع نورمال و مستقل از یکدیگر باشند، آیا حاصل جمع آن ها دارای توزیع نورمال است؟
- اگر متحول های تصادفی مستقل x_1, x_2, \dots, x_n به طور یکسان توزیع شده و دارای اوسط μ و وریانس δ^2 باشند، گفته می توانید که اوسط و وریانس توزیع $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ چند است؟

از فعالیت فوق به نتیجه زیر دست می یابیم:

اگر از یک جامعه بزرگ N با اوسط متناهی μ و وریانس متناهی δ^2 یک نمونه تصادفی n تایی انتخاب کنیم، در این صورت اوسط نمونه یعنی \bar{x} دارای توزیع تقریباً نورمال با اوسط $\mu_{\bar{x}} = \mu$ و

وریانس $\delta_{\bar{x}}^2 = \frac{\delta^2}{n}$ و متحول تصادفی $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ دارای توزیع نورمال معیاری است.

اگر ضریب $\frac{N-n}{N-1}$ برای قیمت‌های بزرگ N به عدد 1 نزدیک شود، لیمیت آن وقتی که $n \rightarrow \infty$ کند، مساوی با 1 می‌شود.

مثال: نمرات شاگردان در یک صنف بزرگ، دارای توزیع نورمال با اوسط 71 و انحراف معیاری 9 است. یک نمونه 9 تایی انتخاب می‌کنیم. احتمال این را که اوسط نمرات این نمونه بیشتر از 80 باشد، حساب کنید. همچنان اگر یک شاگرد را به طور تصادفی انتخاب کنیم، احتمال آن را که نمره او بیشتر از 80 باشد، محاسبه کنید.

حل: چون \bar{x} دارای توزیع نورمال با اوسط μ و انحراف معیاری می‌باشد، داریم:

$$P(\bar{x} > 80) = P\left(z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} > \frac{80 - 71}{\frac{9}{\sqrt{9}}}\right) = P(z > 3)$$

$$= 1 - P(z \leq 3) = 1 - 0.9987 = 0.0013$$

همچنان برای $n = 1$ داریم:

$$P(\bar{x} > 80) = P\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\delta} > \frac{80 - 71}{9}\right) = P(z > 1)$$

$$= 1 - P(z \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

توجه: قیمت $P(z)$ را از جدول (1) توزیع نورمال به دست می‌آوریم.



وزن جعبه‌هایی که توسط یک ماشین بسته بندی می‌شوند، دارای توزیع نورمال با اوسط $\mu = 250gr$ و انحراف معیاری $\delta = 20gr$ می‌باشند. احتمال آن را که اوسط وزن یک نمونه تصادفی $n = 16$ تایی از جعبه ها کم تر از $240gr$ باشد، محاسبه کنید.

ACKU

توزیع نمونه نسبت

در شهر A به تعداد n نفر می‌خواهند شخص B را به عنوان شاروال انتخاب نمایند. اگر این اشخاص مورد سوال قرار گیرند و x شان دهنده تعداد اشخاص موافق باشد، کثرت نسبی آن مساوی به چیست؟



- اگر x دارای توزیع دو جمله‌ای باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$f(x) = \binom{n}{x} P^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

- اگر $\hat{P} = \frac{x}{n} \Rightarrow x = n\hat{P}$ باشد، با تعویض قیمت x در فورمول بالا $f(\hat{P})$ را بنویسید.

- در فورمول $\hat{P} = \frac{x}{n}$ اگر متحول تصادفی x متشکل از مجموع n متحول تصادفی x_1, x_2, \dots, x_n

باشد، \hat{P} با اوسط نمونه چه رابطه‌ای دارد؟

اگر x متحول تصادفی، n مجموعه آزمایش‌های برنولی و P احتمال موفقیت هر آزمایش باشد، در این

صورت: $\hat{P} = \frac{x}{n}$ آماره نسبت نمونه، $E(x) = np$ اوسط (Expected Value) و $V(x) = npq$

وریانس متحول تصادفی x می‌باشند.

با توجه به توزیع دو جمله‌ای، می‌توان توزیع \hat{P} را توسط این فورمول انجام داد:

$$f(n\hat{P}) = \binom{n}{n\hat{P}} p^{n\hat{P}} (1-p)^{n(1-\hat{P})} \quad \hat{P} = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1$$

اوسط (Expected Value) و وریانس متحول‌های تصادفی \hat{P} به این صورت است: $\mu_p = E(\hat{P}) = P$

$$\delta^2 \hat{P} = V(\hat{P}) = \frac{pq}{n} = \frac{p(1-p)}{n}$$

$$z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}} = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

توزیع‌های نورمال معیاری عبارت است از:

مثال: احتمال مرغوب بودن کالایی، $P = 0.3$ است. یک نمونه تصادفی ساده $n = 6$ تایی را انتخاب

می‌کنیم. اگر x نشان‌دهنده تعداد کالاهای ناقص باشد، توزیع احتمال x و \hat{P} را بنویسید.

حل: متحول‌های تصادفی x ، دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $P = 0.3$ و $n = 6$ می‌باشد.

$$f(x) = P(X = x) = B(x, 6, 0.3) \quad x = 0, 1, \dots, 6$$

با استفاده از جدول توزیع دوجمله‌ای احتمال‌های فوق را محاسبه کرده و جدول توزیع احتمال را می‌نویسیم:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0.1176	0.3025	0.3241	0.1852	0.0595	0.0102	0.0007

متحول تصادفی \hat{P} قیمت‌های $0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, 1$ را اختیار می‌کند:

$$P(\hat{P} = 0) = P(X = 0) = 0.1176$$

$$P(\hat{P} = \frac{1}{6}) = P(X = 1) = 0.3025$$

$$P(\hat{P} = \frac{x}{n}) = P(X = x)$$

و بقیه نیز به طور مشابه محاسبه می‌شوند؛ توجه کنید که:

و توزیع احتمال \hat{P} عبارت است از:

\hat{P}	0	1.6	2.6	3.6	5.6	1
$f(\hat{P})$	0.1176	0.3025	0.3241	0.0595	0.0102	0.0007

$$P(\hat{P} \leq 0.6) = P(x \leq 3.6) = P(x \leq 3) = \sum_{x=0}^3 B(x, 6, 0.3) = 0.9294 \quad \text{در مثال بالا:}$$

$$P(\hat{P} \leq 0.27) = P(x \leq 1.62) = P(x \leq 1) = 0.1176 + 0.3025 = 0.4201 \quad \text{و یا:}$$



1. احتمال اینکه شخصی فورم درخواست استخدام را به طور کامل و بدون اشتباه پر کند $P = 0.7$

می‌باشد. یک نمونه $n = 200$ تایی از فورم‌های استخدام پر شده را انتخاب کرده ایم:

- احتمال آن را محاسبه کنید که \hat{P} در داخل فاصله ± 0.05 از نسبت جامعه بیفتد.

- احتمال آن را حساب کنید که \hat{P} بیشتر از 0.6 باشد.

نکات مهم فصل

- متحول تصادفی، اصطلاحی است که به عنوان یک تابع در احصائیه و احتمالات مورد استفاده قرار می گیرد.
- تابع احتمال یک متحول تصادفی گسسته، تابعی است که ناحیه تعریف آن اعدادیست که متحول تصادفی می تواند اختیار کند و ناحیه قیمت های آن شامل احتمال های مربوط به عناصر ناحیه تعریف است.
- تابع احتمال تجمعی و پیوسته تابعی است که ناحیه تعریف آن شامل آن اعدادیست که متحول تصادفی x اختیار می کند و ناحیه قیمت های آن همه تصاویر $f(x)$ می باشد.
- اوسط (Expected Value) و وریانس متحول تصادفی گسسته x به ترتیب عبارت است از:

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) = \bar{x}$$

$$V(x) = S^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - E(x_i))^2 f(x_i)$$

$$P(X = m) = P^m (1 - P)^{1-m} \quad \bullet \text{ توزیع برنولی:}$$

$$P(X = m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m} \quad \bullet \text{ توزیع دو جمله ای:}$$

$$\bar{x} = np, \quad S = \sqrt{npq} \quad \bullet \text{ اوسط و انحراف معیار توزیع دو جمله ای عبارت اند از:}$$

- توزیع احتمال پواسن، توزیع احتمال مجزا است که فورمول آن عبارت است از:

$$P(x = m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}$$

- توزیع نورمال: شکل توزیع نورمال متناظر و شبه زنگوله است در توزیع نورمال شاخص های مرکزی با هم برابر اند و متحول های تصادفی پیوسته دارای ناحیه تعریف محدود می باشد. تابع احتمال آن عبارت است از:

$$f(x) = \frac{1}{\delta \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \bar{x}}{\delta} \right)^2}$$

درحالی که μ اوسط جامعه و δ انحراف معیار جامعه است.

- برای محاسبه مساحت تحت منحنی تابع احتمال $f(x)$ در فاصله های a الی b ، می توان از انتیگرال زیر

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{1}{\delta \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\delta} \right)^2} dx \quad \text{استفاده نمود:}$$

• توسط رابطه $z = \frac{x - \mu}{\delta}$ می توان هر مجموعه احصائیوی را که دارای توزیع نورمال است، به نورمال معیاری تبدیل کرد.

• نمونه به دو دسته تقسیم می شود: نمونه ساده و نمونه تصادفی.
 • روش های نمونه گیری به صورت عموم عبارت اند از: نمونه گیری تصادفی، نمونه گیری منظم، نمونه گیری گروهی و خوشه‌یی.

• کمیت نمونه را اوسط نمونه و کمیت جامعه را پارامتر جامعه می گویند.
 • تابع مربوط متحول های تصادفی نمونه x را به صورت $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1)f(x_2) \dots f(x_n)$ تعریف می کنند.

• اگر x یک نمونه تصادفی از جامعه با تابع احتمال $f(x)$ باشد، $E(\bar{x}_n) = \mu$ اوسط، $V(\bar{x}_n) = \frac{1}{n} \delta^2$ واریانس اوسط، δ^2 واریانس جامعه و S^2 را واریانس نمونه می نامند.

• هرگاه از یک جامعه نورمال N یک نمونه تصادفی n تایی انتخاب کنیم؛ آماره اوسط نمونه \bar{x} دارای توزیع نورمال با اوسط $\mu_{\bar{x}} = \mu$ و واریانس $\delta_{\bar{x}}^2 = \frac{\delta^2}{n}$ و $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ می باشد.

• هرگاه x توزیع دو جمله‌یی، به n تعداد آزمایش های تکراری برنولی، P احتمال کامیابی و $q = 1 - p$ عدم احتمال کامیابی هر آزمایش باشند، در این صورت آماره نسبت نمونه اوسط (*Expected Value*) و واریانس متحول تصادفی x به ترتیب عبارت اند از: $\hat{P} = \frac{x}{n}$ ، $E(x) = n p$ و $V(x) = n p q$

همچنان توزیع دو جمله‌یی، اوسط، واریانس و توزیع نورمال معیاری و متحول تصادفی \hat{P} به ترتیب عبارت اند از:

$$E(\hat{P}) = P \quad , \quad f(\hat{P}) = \binom{n}{\hat{P}} P^{n\hat{P}} q^{(1-P)}$$

$$z = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \quad , \quad V(\hat{P}) = \frac{pq}{n}$$

تمرینات عمومی فصل هفتم

1. دو سکه را چهار مرتبه با هم پرتاب کنید و تعداد خط‌ها را در نظر بگیرید:
 - متحول‌های تصادفی را به صورت تابع نشان دهید.
 - احتمال هر یک از پرتاب‌ها را با فضای نمونه نسبت دهید.
 - تابع احتمال گسسته و تجمعی آن را بنویسید.
2. هر گاه احتمال ناقص بودن یک جوهر بوت $P = 0.1$ باشد، اوسط و انحراف معیار بوت‌های ناقص را در یک نمونه $n = 400$ جوهر بوت دریافت کنید؟
3. در انبار یک شرکت به تعداد 500 پایه کمپیوتر وجود دارد که از آن جمله، 50 پایه آن نواقص دارد. یک مشتری 10 پایه از این کمپیوترها را می‌خرد، احتمال اینکه وی 8 پایه سالم را خریده باشد چقدر است؟
4. از اطلاعات زیر که مربوط به دو پارامتر اوسط و انحراف معیار می‌شود، برای رسم یک توزیع نورمال استفاده نمایید.

ابتدا یک محور افقی رسم کنید و نقاط \bar{x} ، $\bar{x} + s$ ، $\bar{x} - s$ ، $\bar{x} + 2s$ و $\bar{x} - 2s$ را در روی آن محور مشخص کنید سپس نقطه‌یی را به ارتفاع اختیاری h در بالای \bar{x} در نظر بگیرید. اکنون در بالای $\bar{x} + s$ نقطه‌یی به ارتفاع $0.6h$ انتخاب کنید. یعنی نقطه‌یی با مختصات $(\bar{x} + s, 0.6h)$. چون منحنی نورمال متناظر است، همین عمل را در خصوص $\bar{x} - s$ نیز انجام دهید. حال در بالای $\bar{x} + 2s$ و $\bar{x} - 2s$ دو نقطه‌یی به ارتفاع h و $0.15h$ در نظر بگیرید. متوجه باشید که برای رسم دقیق منحنی نورمال باید اعداد $0.6067h$ و $0.1354h$ به جای $0.6h$ و $0.15h$ مورد استفاده قرار گیرند. در نتیجه، این نقاط را توسط یک خط منحنی به هم وصل کنید و بگویید که این منحنی در کدام فاصله‌ها محدب و در کدام فاصله‌ها مقعر است.
5. یک مطالعه در یک شفاخانه نشان می‌دهد که تعداد متوسط مراجعین در ساعات 6 الی 8 بعد از ظهر روز شنبه 25 نفر است. فرض کنید که توزیع تابع احتمال پواسن در این حالت صدق می‌کند.
 - توزیع احتمال تعداد مراجعین شفاخانه بین ساعات 6 الی 8 بعد از ظهر روز شنبه را به دست آرید و گراف آن را رسم کنید آیا این توزیع خمیده است؟
 - مقدار اوسط و انحراف معیار این توزیع را به دست آرید.
 - آیا ممکن است که بیش از 7 نفر بین ساعات 6 الی 8 بعد از ظهر روز شنبه به شفاخانه مراجعه کنند؟ چرا؟
6. فرض کنید تعداد اشتباهات یک صفحه از یک کتاب دارای توزیع پواسن با پارامتر $\lambda = \frac{1}{2}$ می‌باشد مطلوب است محاسبه احتمال این که:

- حد اقل یک اشتباه تایی در این صفحه وجود داشته باشد.
 - دقیقاً 5 اشتباه تایی در این صفحه وجود داشته باشد.
 - بین 3 الی 6 اشتباه تایی در این صفحه وجود داشته باشد.
7. فرض کنید که قطر پیستون‌هایی که توسط ماشین اتوماتیکی ساخته می‌شوند، به طور نورمال با اوسط 25 میلی‌متر و انحراف معیاری 0.5 میلی‌متر توزیع شده است:
- احتمال اینکه قطر پیستون بین 25.2 تا 25.9 میلی‌متر باشد، چقدر است؟
 - چه نسبتی از پیستون‌ها دارای قطرهایی معادل 25 میلی‌متر و کمتر اند.
 - اگر 1000 پیستون ساخته شود، چند دانه آن‌ها احتمال می‌رود که قطری کم تر از 24.07 میلی‌متر داشته باشند.
 - چه درصدی از پیستون‌های تولیدی، قطری معادل 24.56 میلی‌متر یا بیشتر دارند؟
8. میزان درآمد افراد یک شهر، دارای توزیع غیرنورمال با اوسط $\mu = 90$ افغانی و انحراف معیاری 25 افغانی است. احتمال آن که مجموع درآمد افراد یک نمونه 225 نفره بیش از 21000 افغانی باشد، چقدر است؟
9. می‌دانیم که 56% مردم طرف‌دار نامزد A هستند. چقدر احتمال دارد که در یک نمونه $n = 50$ تایی، حداقل 60% افراد طرف‌دار نامزد A باشند؟
10. در مثال بالا اگر $P = 0.4$ باشد یعنی احتمال این که فردی طرف‌دار نامزد A باشد مساوی به 0.4 است، یک نمونه $n = 200$ تایی انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که لااقل 100 نفر از آن‌ها طرفدار نامزد A باشند؟

فصل هشتم احتمالات



فضای نمونه گسسته و پیوسته:

در شکل مقابل، از نل‌های شماره 1 و 2 آب بر زمین می‌ریزد. چه تفاوتی بین ریختن قطره‌های آب از نل‌های مذکور وجود دارد؟



- با پرتاب یک دانه رمل می‌توانید بگویید که فضای نمونه تمام نتایج ممکن کدام است؟
 - آیا زمان افتادن یک عدد سیب پخته را از درخت پیش‌بینی کرده می‌توانید که دقیقاً بعد از گذشت چند ثانیه، دقیقه و یا ساعت به زمین خواهد افتاد؟
 - فضای نمونه افتادن سیب را نظر به زمان بنویسید؟
 - تعداد عناصر فضای نمونه پرتاب دانه رمل و افتادن سیب از درخت را چگونه مقایسه می‌کنید؟
- از انجام فعالیت فوق نتیجه زیر به دست می‌آید:

فضاهای نمونه یک تجربه اتفاقی عبارت از مجموعه معین یا نامعین و یا محدود یا غیرمحدودی اند که یک دسته آنها قابل شمارش (countable) و دسته دیگر آنها غیر قابل شمارش (uncountable) می‌باشد. فضای نمونه‌یی که عناصر آن قابل شمارش و تشخیص‌اند، به نام فضای نمونه گسسته یا غیرمتصل و فضای نمونه‌یی که عناصر آن قابل شمارش نیستند به نام فضای نمونه متمادی یا پیوسته یاد می‌گردند.

مثال 1: کدام یک از فضاهای نمونه زیر پیوسته و کدام یک آن‌ها گسسته است:

الف: پرتاب دو دانه رمل

ب: انتخاب یک عدد حقیقی بین 8 و 12

ج: انتخاب 3 نفر متعلم از بین 30 نفر شاگرد

د: بالا رفتن درجه حرارت یک کوره از 100 درجه سانتی‌گرید به 1000 درجه سانتی‌گرید

ه: انتخاب زاویه بین 30° الی 45° .

حل: الف و ج چون از تعداد محدودی عضو تشکیل گردیده، فضای نمونه گسسته هستند و چون ب، د و ه از اعداد حقیقی تشکیل گردیده اند، نامحدود و یا پیوسته می باشند.

مثال 2: خیر برای آب دادن گل های داخل حویلی خود، یک واترپمپ خریده است. هرگاه عمر واتر پمپ را بر حسب ساعت در نظر بگیریم، فضای نمونه طول عمر واترپمپ می تواند هر عدد حقیقی مثبت در صورت خراب شدن باشد و وقوع همچو یک حادثه اتفاقی صفر و یا هر عدد حقیقی شده می تواند که این فضای نمونه، یک فضای نمونه متمادی و یا پیوسته است.

یعنی: $\{t \mid \text{زمان خراب شدن واترپمپ } t \in IR : t \geq 0\}$ است و در فضای نمونه فوق t نشان دهنده طول عمر واترپمپ می باشد.

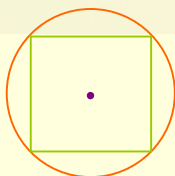
یادداشت:

1- در مثال اول جز الف و ج فضاهای نمونه محدود و عناصر آنها قابل شمارش، و جز ب، د و ه فضاهای نمونه نامحدود و عناصر آنها غیر قابل شمارش می باشند، که تمام اعداد حقیقی مثبت را می تواند در بر داشته باشد.

2- در مثال دوم، فضای نمونه پیوسته یا نامحدود است که به صورت یک انتروال اعداد حقیقی ارایه می گردد.



1- تیراندازی به داخل یک دیسک دایروی با شعاع r را در نظر گرفته و فضای نمونه محل اصابت تیر به داخل دایره را که نزدیک به مرکز اصابت می نماید ارایه می کند، بگویید که چگونه یک فضای نمونه است؟



2- یک نقطه را به صورت تصادفی در داخل دایره

شکل مقابل انتخاب می کنیم. مطلوب است احتمال

آنکه نقطه داخل مربع باشد؟

3- یک عدد دو رقمی طبیعی را انتخاب نموده و احتمال آن را که عدد مضرب 4 باشد، دریافت کنید.

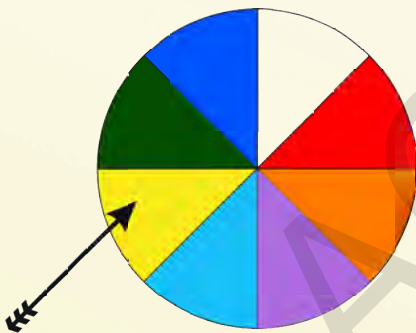
حوادث هم چانس



در انداختن یک دانه رمل نورمال شرط
آمدن شماره 1 و یا 5 چیست؟
چانس آمدن شماره‌های 2 و 5 با هم
چه رابطه‌یی دارند؟



مطابق شکل، اگر تیری به سمت دایره داده شده بیندازیم:



- چانس برخورد تیر به ناحیه رنگ سرخ و سبز با هم چه رابطه‌یی دارند؟
- درمورد مقدار چانس برخورد تیر به رنگ‌های نارنجی و سفید چه گفته می‌توانید؟
- مقدار چانس برخورد تیر به رنگ سیاه چند است؟
- فضای نمونه تجربه را بنویسید؟
- حوادث اتفاقی اولیه را فهرست نموده و بگویید که مقدار احتمال هر کدام چند است؟
- درمورد مجموع احتمالات حوادث اولیه چه گفته می‌توانید؟

از انجام فعالیت فوق نتیجه زیر به دست می‌آید:

حوادث ساده اولیه که احتمال وقوع آنها در اثر انجام یک تجربه با هم برابر باشد، به نام حوادث چانس یاد می‌گردند.

مثلاً: هرگاه $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ یک فضای نمونه باشد، در این صورت $\{e_i\}$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ هر کدام یک حادثه اتفاقی اولیه است که $0 \leq P(\{e_i\}) \leq 1$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ می‌باشد.

همچنین، مجموع احتمالات حوادث اولیه مساوی با یک است:

$$P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \dots + P(\{e_n\}) = \sum_{i=1}^n P(e_i) = 1$$

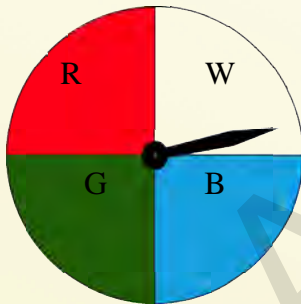
مثال: 4 نفر در یک مسابقه شرکت می کنند، احتمال برنده شدن هر کدام آنها در صورت فضای نمونه هم چانس مطلوب است.

حل: هرگاه فضای نمونه $S = \{a, b, c, d\}$ باشد، احتمال هر حادثه اتفاقی اولیه $\frac{1}{4}$ می باشد. در

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$

از این رو حوادث اتفاقی $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ و $\{d\}$ حوادث هم چانس هستند.

تمرین



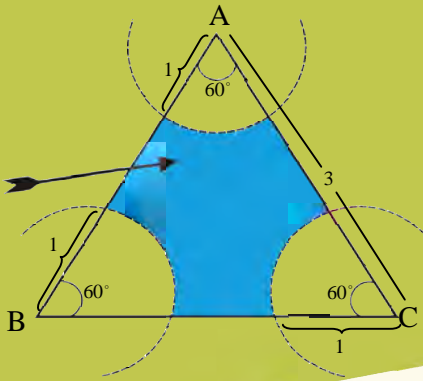
1- شکل مقابل را در نظر گرفته و بگویید اگر احتمال ایستادن عقربه بالای رنگ آبی و سفید 0.30 و روی رنگ سرخ 0.26 باشد، احتمال ایستادن آن روی رنگ سبز چند است؟

2- جدول کثرت زیر را برای انداختن یک دانه رمل در نظر بگیرید و دریافت کنید احتمال آن را که دانه رمل شماره 5 آید.

شماره رمل	1	2	3	4	5	6
کثرت	7	9	8	7	3	10

3- یک دانه رمل طوری پرکاری شده است که احتمال آمدن شماره های جفت دو چند شماره های طاق است، احتمال شماره 5 رمل را دریافت کنید؟

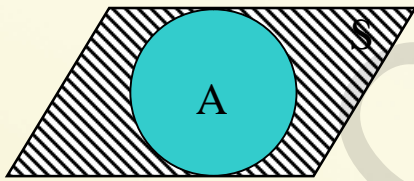
احتمال فضاهای پیوسته



تیری به داخل یک مثلث متساوی الاضلاع که طول هر ضلع آن 3 واحد است، پرتاب می کنیم. احتمال آنکه نقطه اصابت تیر از هر رأس مثلث بزرگ تر از 1 واحد باشد، چند است؟



- آیا گفته می توانید که در یک قطعه خط، قسمتی از یک مستوی و یا حجمی از فضا چند نقطه کنار هم قرار دارند؟

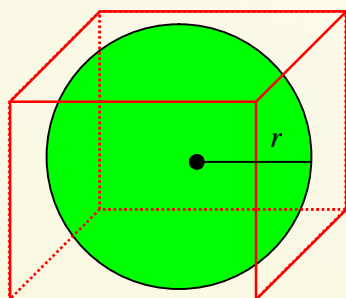
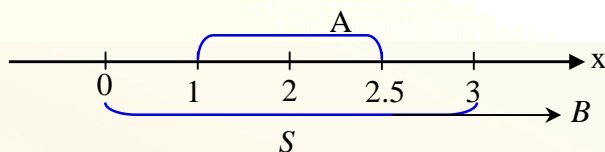


- احتمال وقوع نقاطی در ساحة A مساحت فرعی S که در شکل نشان داده شده است، با نسبت مساحت های ساحة های A و S چه رابطه یی دارد؟

- آیا می توانیم این مسأله را بر محاسبه احتمال قسمتی از حجم یک جسم فضایی تعمیم دهیم؟ از انجام فعالیت فوق نتیجه زیر به دست می آید:
- فضای نمونه پیوسته یک مجموعه نامحدود یا نامعین از نقاط است که به شکل محور اعداد حقیقی، سطح در مستوی و یا احجام در فضا می باشد. چون نمایش این نقاط ممکن نیست، برای پیدا کردن نسبت احتمال از طول قطعه خط ها، سطوح اشکال و یا حجم اجسام استفاده می نماییم.
- معمولاً برای استفاده از محور اعداد یک متحول x ، قسمتی از یک مساحت از دو متحول X و Y و بالاخره برای احجام از متحولین x, y, z استفاده به عمل می آوریم:
- مثال 1:** روی محور اعداد در انتروال باز $(0, 3)$ یک نقطه مانند x را به صورت اتفاقی انتخاب می نماییم. احتمال این را که $1 < x < 2.5$ باشد، دریافت کنید؟

حل: محور اعداد حقیقی را رسم نموده و فواصل S و A را روی آن مشخص می‌نماییم. بنابراین با در نظر داشت شکل برای احتمال حادثه A داریم:

$$P(A) = \frac{\text{طول قطعه خط } A}{\text{طول قطعه خط } B} = \frac{2.5 - 1}{3 - 0} = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$$



مثال 2: به صورت اتفاقی، یک نقطه را در داخل یک مکعب به ضلع 2 واحد انتخاب می‌نماییم. احتمال آن را که این نقطه داخل کره محاطی مکعب مذکور باشد، دریافت کنید؟

حل: اگر یک کره در داخل مکعبی به ضلع a محاط شده باشد، آنگاه شعاع کره $r = \frac{a}{2}$ خواهد بود. بنابراین حادثه اتفاقی $A = \text{حجم کره و فضای نمونه } S$ ، حجم مکعب می‌باشد.

$$r = \frac{a}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$P(A) = \frac{\text{حجم کره}}{\text{حجم مکعب}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi(1)^3}{2^3} = \frac{\pi}{6}$$

تمرین



1- روی محور اعداد حقیقی دو نقطه A و B را به صورت اتفاقی انتخاب می‌نماییم طوری که $-2 \leq B \leq 0$ و $0 \leq A \leq 3$ باشد، مطلوب است احتمال آن که فاصله d بین نقاط A و B بزرگ‌تر از 3 واحد باشد.

2- اگر یک نقطه را به صورت تصادفی روی سطح یک دایره انتخاب نماییم، احتمال آن را که نقطه مذکور به مرکز دایره نزدیک‌تر از محیط آن باشد، دریافت کنید.

احتمال مشروط



از جمله 20 تن محصل ذکور و اناث که از یک ولایت در امتحان کانکور موفقانه به پوهنځی طب کامیاب شده اند، به تعداد 5 تن آنها کاراته بازهای خوب نیز هستند. اگر از جمله 15 پسر کامیاب شده 4 تن ورزشکار یعنی کاراته بازهای خوب باشند اگر از بین محصلین مذکور به طور اتفاقی یک تن را انتخاب نماییم، دریافت کنید احتمال آن که:

- نفر انتخاب شده یک دختر کاراته باز باشد؟
- در سوال بالا انتخاب دختری که به پوهنځی طب کامیاب شده باشد مشروط به چیست؟



از 2500 تن شاگرد، 1600 تن شان به مطالعه کردن عادت دارند. هر گاه 70 درصد شاگردان مرد که 80 درصد مجموع شاگردان را تشکیل می دهند، به مطالعه کردن عادت داشته باشند، اگر احتمال برای همه شاگردان مساوی باشد، با در نظر داشت حوادث زیر برای انتخاب یک شاگرد از بین شاگردان موسسه هر گاه:

R : به مطالعه عادت دارد.

M : شاگرد مرد است.

F : یک خانم است.

به حل سوالات زیر فکر نمایید:

- دریافت کنید احتمال آن که از جمله مطالعه کننده گان یک شاگرد انتخاب شده مرد باشد؟
- دریافت کنید احتمال آن که یک شاگرد انتخاب شده از بین مطالعه کننده گان یک خانم باشد؟
- دریافت کنید احتمال آن که فرد انتخاب شده یک مرد علاقه مند به مطالعه باشد؟

از انجام فعالیت فوق نتیجه زیر به دست می آید:

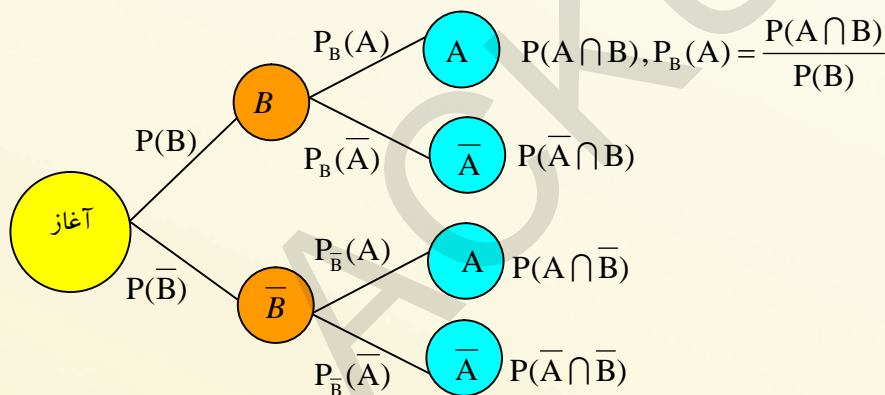
در حقیقت، دریافت احتمال انتخاب شاگرد مرد به شرط آن که به مطالعه کردن عادت داشته باشد، عبارت از حاصل تقسیم احتمالات زیر می باشد. اگر Ω فضای نمونه و $| \Omega |$ تعداد عناصر آن باشد داریم که:

$$\text{احتمال انتخاب مردی که عادت به مطالعه داشته باشد} = \frac{|M \cap R|}{|R|} = \frac{\frac{|M \cap R|}{|\Omega|}}{\frac{|R|}{|\Omega|}} = \frac{P(M \cap R)}{P(R)} = P_R(M)$$

$P_R(M)$ عبارت از احتمال حادثه‌یی است که فرد انتخاب شده یک مرد به شرط آن که عادت به مطالعه داشته باشد، است.

تعریف: هرگاه A و B دو حادثه اتفاقی یک فضای نمونه S باشند، طوری که $P(B) \neq 0$ در این صورت احتمال $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ به نام احتمال مشروط حادثه اتفاقی A نظر به حادثه اتفاقی B یاد می‌گردد.

با در نظر داشت تعریف فوق، نظر به قاعده اول مسیر، از دیاگرام‌های درختی نیز می‌توانیم استفاده کنیم:



از فرمول احتمال مشروط، نتیجه مهم زیر به دست می‌آید:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

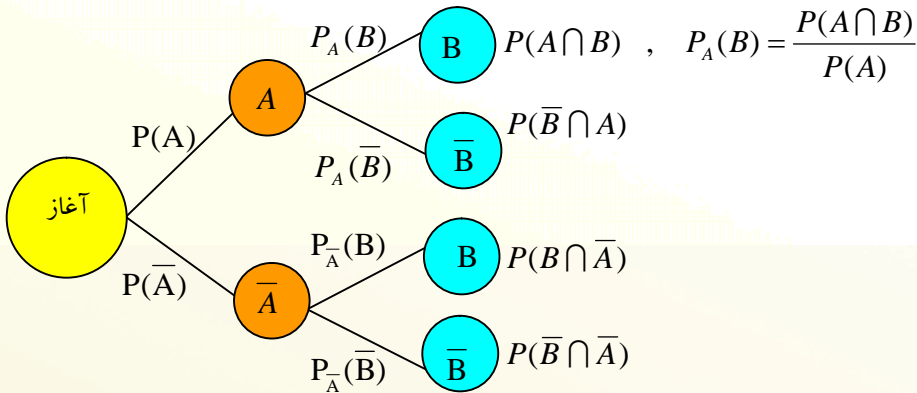
1- با استفاده از قاعده اول مسیر، داریم:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

و با استفاده از قاعده دوم مسیر، داریم:

$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

2- از روی دیاگرام درختی زیر، داریم:



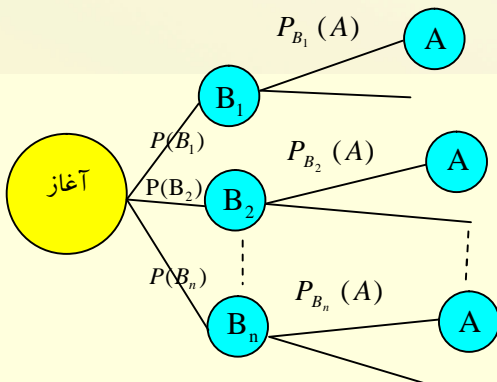
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

و نظر به نتیجه (1)، به دست می‌آید:

$$P_A(B) = \frac{P_B(A) \cdot P(B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(B) \cdot P_B(A)}$$

3- هر گاه این حالت را برای تقسیمات اختیاری B_1, B_2, \dots, B_n حوادث اتفاقی فضای نمونه Ω عمومیت ببخشیم در این صورت با در نظر داشت دیاگرام درختی بالا، می‌توان فرمول زیر را به دست آورد:

$$P_A(B_i) = \frac{P_{B_i}(A) \cdot P(B_i)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)} = \frac{P(A \cap B_i)}{\sum_{k=1}^n P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)} \quad i=1, 2, \dots, n$$



مثال: یک شاگرد در 50٪ روزهای رفتن به مکتب از سرویس استفاده می کند که با احتمال 70٪ در وقت معین به مکتب می رسد. به طور اوسط، او با احتمال 60٪ در وقت معین در مکتب حاضر می شود. هرگاه حوادث:

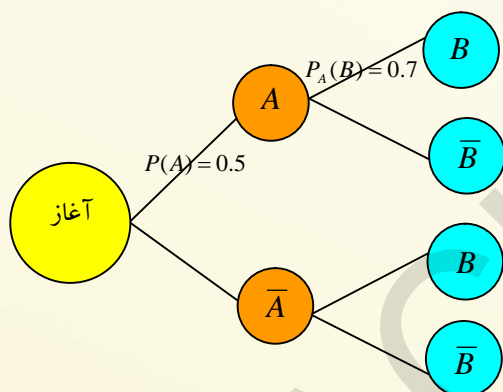
A: به وسیله سرویس رفتن B: در وقت معین رسیدن

باشد، در این صورت احتمال مشروط A نظر به B یعنی $P_B(A)$ مطلوب است؟

حل: برای دریافت احتمال مذکور با در نظر داشت دیاگرام درختی زیر و نظر به فورمول، داریم:

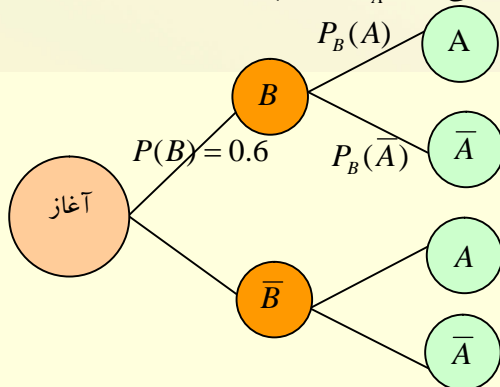
$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(B)} = \frac{0.5 \cdot 0.7}{0.6} = 0.5833 = 58.33\%$$

بنابراین احتمال رسیدن به وسیله سرویس مشروط بر این که به وقت معینه در مکتب باشد 58.33٪ می باشد.

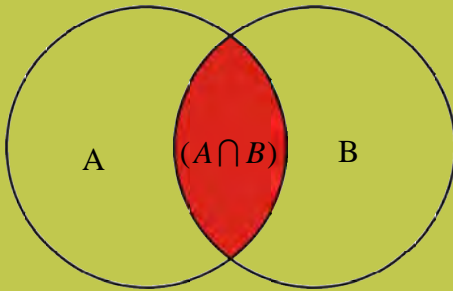


تمرین

با استفاده از دیاگرام زیر برای احتمال مشروط وقت معین رسیدن به مکتب، به شرط این که به وسیله سرویس صورت گرفته باشد. یعنی $P_A(B)$ و احتمال حادثه اتفاقی به وقت معینه رسیدن به مکتب به شرط آن که به وسیله سرویس نیامده باشد یعنی $P_{\bar{A}}(B)$ مطلوب است.



اصل حاصل ضرب



احتمال حادثه اتفاقی A مشروط به B و احتمال

حادثه اتفاقی A و B با هم چه رابطه‌ی دارند؟



فعالیت

هرگاه A و B دو حادثه اتفاقی یک فضای نمونه S باشند:

- احتمال حادثه اتفاقی A مشروط به B را بنویسید؟
- احتمال حادثه اتفاقی $(A \cap B)$ را با استفاده از حوادث اتفاقی A و B یا A مشروط به B بنویسید.

• با استفاده از گراف‌های درختی، قیمت حاصل ضرب $P(B) \cdot P_B(A)$ را به دست آرید.

• نتایج محاسبه دو بند بالای فعالیت را با هم مقایسه کنید؟

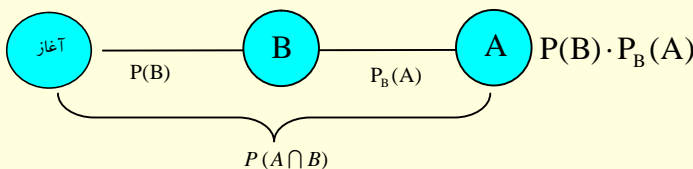
• آیا می‌توانیم موضوع را بر بیشتر از دو حادثه اتفاقی تعمیم دهیم؟

از انجام فعالیت فوق نتیجه زیر به دست می‌آید:

در یک فضای نمونه S برای دو حادثه اتفاقی A و B با در نظر داشت تعریف احتمال مشروط،

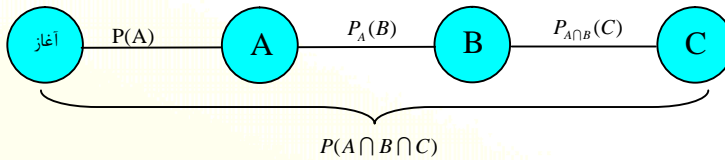
$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A) \text{ داریم:}$$

این مسأله را از گراف درختی نیز می‌توان به دست آورد:



$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

این مطلب را برای سه حادثه اتفاقی A، B و C به شکل زیر توسعه می‌دهیم:



$$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cap B}(C)$$

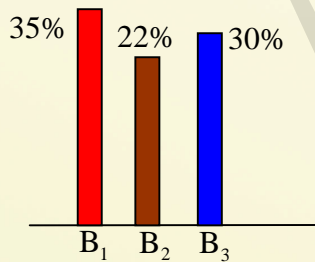
قاعده فوق را به نام اصل حاصل ضرب یاد نموده و می‌توان آن را برای تعداد اختیاری حوادث اتفاقی نیز به دست آورد.

مثال: در انتخابات پارلمانی سه ولایت B_1, B_2, B_3 که برای هر کدام آن فیصدی مشترکین انتخابات و حزب جمهوری داده شده است؛ با کدام احتمال مشترکین انتخابات و یا رای دهنده‌گان حزب جمهوری را انتخاب کرده اند؟

حل: حوادث اتفاقی زیر را تعریف و نامگذاری می‌نماییم:

V: رای دهنده‌گانی که حزب جمهوری را انتخاب کرده اند.

B_i : رای دهنده‌گان ولایت $B_i - (i = 1, 2, 3, \dots, m)$ ارقام در زیر داده شده است.



ولایت	رای دهنده‌گان به فیصدی	رای دهنده‌گان به حزب جمهوری
B_1	33.2%	35
B_2	46.5%	22
B_3	20.3%	30

حوادث اتفاقی $B_i (i = 1, 2, 3)$ در حقیقت یک تقسیم فضای نمونه S را تشکیل داده که برای آنها صورت می‌پذیرد.

1- B_i ها با هم دو به دو مستقل اند و عنصر مشترک ندارند.

2- برای فضای نمونه S، $S = B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \bigcup_{i=1}^3 B_i$ بوده، سپس

$$V = \bigcup_{i=1}^3 (B_i \cap V)$$

از این رابطه می توان برای احتمال طرفین بنویسیم:

$$\begin{aligned} P(V) &= P\left(\bigcup_{i=1}^3 (B_i \cap V)\right) = \sum_{i=1}^3 P(B_i \cap V) = \sum_{i=1}^3 P(B_i) \cdot P_{B_i}(V) \\ &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(V) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(V) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(V) \\ &= 0.332 \cdot 0.35 + 0.465 \cdot 0.22 + 0.203 \cdot 0.3 \\ &= 0.1162 + 0.1023 + 0.0609 \\ &= 0.2794 = 27.94\% \end{aligned}$$

تعریف: حالت عمومی حوادث B_1, B_2, \dots, B_n طوری که $P(B_i) \neq 0$ باشد $i = 1, 2, \dots, n$ یک حادثه اتفاقی فضای نمونه S می باشد. که احتمال کامل را تشکیل می دهد و برای حادثه

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A) \text{ داریم:}$$

از تعریف احتمال مشروط، نظر به قضیه اصل حاصل ضرب و با در نظر داشت مسئله احتمال، فرمول زیر که به نام فرمول بایز (Bayes) یاد می گردد، به آسانی به دست می آید طوری که $i = 1, \dots, n$ یک حادثه از فضای نمونه S برای $P(B_i) \neq 0$ ، $i = 1, \dots, n$ حادثه اتفاقی A با احتمال $P(A) \neq 0$ داریم:

$$P_A(B_i) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^n P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)} \quad \text{فرمول Bayes:}$$

فرمول بایز کاربرد فراوان دارد، مثلاً برای $n = 2$ هرگاه $B_1 = B$ و $B_2 = \bar{B}$ در نظر گرفته شود، در حقیقت B_1 و B_2 حوادثی از فضای نمونه S هستند و داریم:

$$P_A(B) = \frac{P(B) \cdot P_B(A)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

فرمول بالا، فرمول بایز برای $n = 2$ می باشد.

مثال: در یک فابریکه سه ماشین A ، B و C به ترتیب با سهم 30٪، 30٪ و 40٪ گروپ های برق تولید می کنند. خرابی تولید گروپ ها در ماشین ها به ترتیب 4٪، 2٪ و 5٪ می باشد هرگاه گروپ های تولید شده به صورت مختلط فروخته شوند مطلوب است:

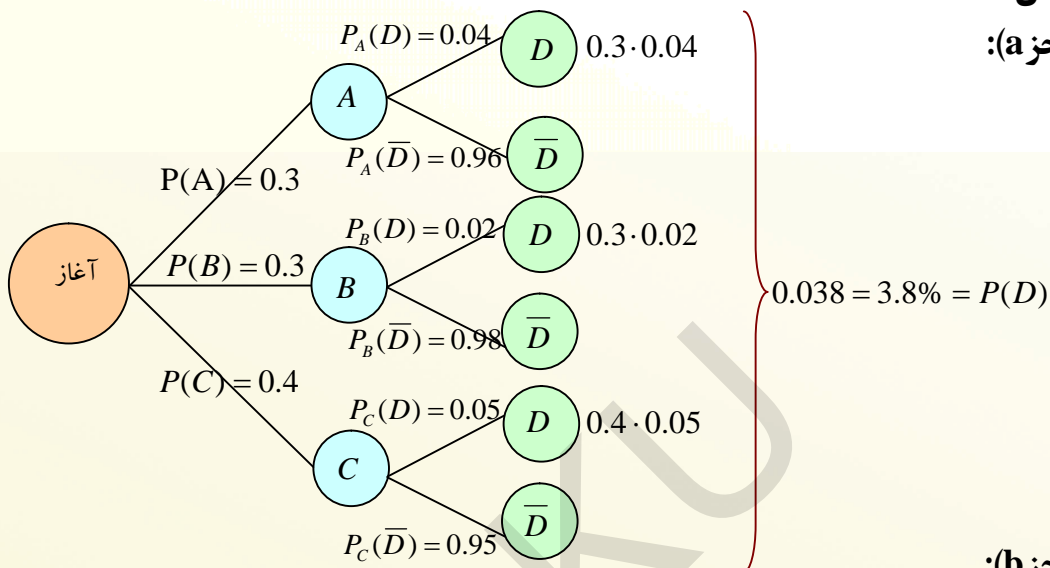
(a) احتمال آن که یک گروپ خریداری شده خراب باشد.

(b) به کدام احتمال یک گروپ خراب فروخته شده مربوط ماشین C است؟

(c) یک گروپ دست ناخورده به کدام احتمال از ماشین B خواهد بود؟

حل:

جز (a):



جز (b):

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P_C(D)}{P(D)} = \frac{p(c) \cdot p_c(D)}{P(A) \cdot P_A(D) + P(B) \cdot P_B(D) + P(C) \cdot P_C(D)}$$

$$= \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.3 \cdot 0.04 + 0.3 \cdot 0.02 + 0.4 \cdot 0.05} = \frac{0.02}{0.038} = 0.526 = 52.6\%$$

جز (c):

$$P_{\bar{D}}(B) = \frac{P(\bar{D} \cap B)}{P(\bar{D})} = \frac{P(B) \cdot P_B(\bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(B) \cdot P_B(\bar{D})}{P(A) \cdot P_A(\bar{D}) + P(B) \cdot P_B(\bar{D}) + P(C) \cdot P_C(\bar{D})}$$

$$= \frac{0.3 \cdot 0.98}{0.3 \cdot 0.96 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.95}$$

$$= \frac{0.294}{0.288 + 0.294 + 0.38} = \frac{0.294}{0.962} = 0.3056 = 30.56\%$$

تمرین



در بین 1000 دانه رمل، فقط بر هر شش رخ یکی از آن، خال شش شماره زده شده است. از بین آن‌ها یک دانه به صورت اتفاقی انتخاب و سه بار انداخته شده و هر سه بار 6 آمده است. احتمال آن را که این دانه به صورت درست شماره خورده باشد، دریافت کنید؟

استقلالیت حوادث اتفاقی

از احتمال مشروط می‌دانیم که در دو حادثه اتفاقی

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

A و B، ظهور حادثه B بر حادثه A تأثیر می‌گذارد.

بدین سبب لازم است تا هنگام محاسبه احتمال حادثه

A حادثه B را در نظر بگیریم.

در حالتی که وقوع حادثه اتفاقی A بر حادثه اتفاقی B تأثیر نداشته باشد و بر عکس آن؛

حاصل ضرب احتمال A و B با احتمال حادثه $A \cap B$ چه رابطه‌ی دارد؟

تعریف: دو حادثه اتفاقی A و B که بر همدیگر تأثیر گذار نباشند، به نام حوادث اتفاقی مستقل

یاد می‌گردند. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$



فضای نمونه S و دو حادثه مستقل از همدیگر A و B را که شامل فضای نمونه S می‌باشد، در نظر بگیرید.

• با توجه به فورمول احتمال مشروط در صورتی که A و B دو حادثه مستقل از هم باشند،

احتمالات $P(A)$ و $P_B(A)$ چه فرقی با هم دارند؟

• احتمال حادثه اتفاقی $P(A \cap B)$ مساوی به چیست؟

• از فورمول احتمال حوادث $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ در صورتی که A و

B نقطه مشترک نداشته باشند، چه نتیجه‌ی می‌گیرید؟

از انجام فعالیت فوق نتیجه زیر به دست می‌آید:

1: دو حادثه اتفاقی A و B از هم مستقل گفته می‌شوند، در صورتی که:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (\text{حاصل ضرب})$$

2: اگر A و B دارای نقاط مشترک نباشند:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow (A \cap B) = 0$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (\text{اصل حاصل جمع})$$

مثال 1: هرگاه رنگ چشم و ذکاوت شاگردان یک مکتب را که یکی بالای دیگری بی تأثیر

فرض گردیده باشد، با در نظر داشت حوادث زیر برای انتخاب یک شاگرد به صورت اتفاقی:

H: فرد انتخاب شده یک شاگرد ذکی باشد.

B: شاگرد انتخاب شده دارای چشمان سیاه باشد.

دریافت کنید احتمال آنکه شاگرد انتخاب شده به صورت اتفاقی ذکی و چشمان سیاه داشته باشد.

حل: احتمال این که شاگرد انتخاب شده ذکی و چشمان سیاه داشته باشد:

$$\text{چون: } P_B(H) = P(H) \text{ و علاوتاً } P_B(H) = \frac{P(B \cap H)}{P(B)} \text{ بنابر این } P(B \cap H) = P(H) \cdot P(B)$$

حالت عمومی: n حادثه اتفاقی A_1, A_2, \dots, A_n ($n \geq 2$) احتمالاً از هم مستقل نامیده می شوند هرگاه برای هر ترکیب دو یا چندین حادثه آنها قاعده حاصل ضرب صدق کند؛ در غیر آن حوادث احتمالاً با هم وابسته نامیده می شوند.

نتیجه

1: دقت باید کرد با استفاده از قاعده حاصل ضرب در جدول متقاطع زیر نیز می توان نتایج احتمالات حوادث اتفاقی $A \cap B, A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap B, \bar{A} \cap \bar{B}$ را برای حوادث A و B که دارای احتمالات a و b باشند، به ساده گی به دست آوریم. از استقلالیت A و B می دانیم که حوادث A و \bar{A} ، B و \bar{B} و بالاخره \bar{A} و \bar{B} نیز از هم مستقل اند. بنابراین داریم:

	B	\bar{B}	
A	$P(A \cap B) = a \cdot b$	$P(A \cap \bar{B}) = a(1-b)$	a
\bar{A}	$P(\bar{A} \cap B) = b(1-a)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = (1-a)(1-b)$	$1-a$
	b	$1-b$	1

2: برای سه حادثه اتفاقی A ، B و C که احتمالاً از هم مستقل می باشند، داریم:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

مثال 2: در داخل یک خریطه دو گلوله سفید و دو گلوله سیاه قرار دارند، دو گلوله یکی پی دیگر از آن می برداریم طوری که:

a- پس از گرفتن اولین گلوله، آن را دوباره در داخل خریطه می گذاریم.

b- گلوله اول را پس از برداشتن، دوباره در خریطه نمی گذاریم.

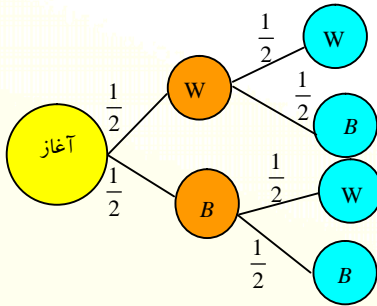
حوادث:

A : اولین بار گلوله سفید برآید. B : دومین بار گلوله سفید باشد. C : از هم مستقل یا وابسته اند.

حل a): چون $P(A) = \frac{1}{2}$ ، $P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ است؛ بنابراین:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

از اینجا گفته می‌توانیم که A و B از هم مستقل اند.

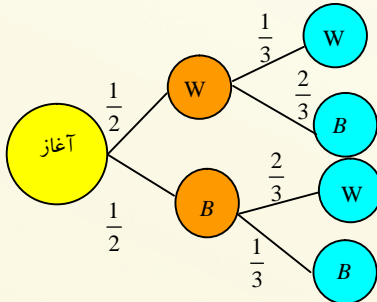


(a) چون $P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$, $P(A) = \frac{1}{2}$ است

$$\Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

$$\frac{1}{6} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{6} \neq \frac{1}{4}$$



C: بنابراین حوادث A و B با هم وابسته اند.

مثال 3: خانه‌های جدول متقاطع زیر را تکمیل کنید:

	B	\bar{B}	
A	0.12	$P(A \cap \bar{B}) = ?$	$?$
\bar{A}	$P(\bar{A} \cap B) = ?$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = ?$	$?$
	$?$	0.6	

حل: چون $P(\bar{B}) = 0.6$ است، بنابراین داریم:

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.12}{0.4} = 0.3$$

$$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.3 = 0.7$$

و برای تقاطع حوادث داریم:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0.7 \cdot 0.6 = 0.42$$

بدین ترتیب، با وضع قیمت‌ها در جدول، حل مسأله تکمیل می‌گردد.



تمرین

از یک ستی که عناصر آن 2, 3, 5 و 30 است، احتمال برگزیدن یک رقم از این ست 0.25 می‌باشد، به صورت اتفاقی یک رقم را از این ست انتخاب می‌کنیم؛ اگر A_k حادثه اتفاقی رقم برگزیده شده قابل تقسیم بر k باشد، آیا حوادث اتفاقی A_2, A_3 و A_5 دو به دو مستقل اند یا خیر؟

نکات مهم فصل

فضای نمونه گسسته

فضای نمونه‌یی که عناصر آن قابل شمارش و تشخیص باشند، به نام فضای نمونه گسسته یاد می‌گردد، مانند فضای نمونه پرتاب یک سکه و یا یک دانه رمل.

فضای نمونه پیوسته

فضای نمونه‌یی که عناصر آن قابل شمارش نباشند، به نام فضای نمونه پیوسته یا متمادی یاد می‌گردد. و یا فضای نمونه‌یی که به صورت یک انتروال روی محور اعداد حقیقی و یا اشکال و احجام هندسی در مستوی و فضا می‌توانند ظهور نمایند.

حوادث هم چانس

حوادث اولیه یک فضای نمونه که در انجام یک تجربه با احتمال برابر به وقوع می‌پیوندند، به نام حوادث هم چانس یاد می‌گردند. مجموع احتمالات حوادث اتفاقی هم چانس یک تجربه مساوی با یک می‌باشد.

احتمال فضاهای پیوسته

ست طول قطعه خط‌ها، سطوح و احجام، حالت مساعد و یا مطلوب برای حادثه اتفاقی مورد نظر بر مقدار خطوط، سطح و احجام با فضای پیوسته یک تجربه، عبارت از احتمال فضای پیوسته برای حادثه اتفاقی مورد نظر می‌باشد.

احتمال مشروط

هرگاه A و B دو حادثه اتفاقی یک فضای نمونه S باشند، طوری که $P(B) \neq 0$ بوده باشد، در

این صورت $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ احتمال مشروط حادثه اتفاقی A است مشروط به آن که حادثه B به وقوع پیوسته باشد.

حوادث از هم مستقل

دو حادثه اتفاقی A و B از هم مستقل نامیده می‌شوند:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (\text{اصل حاصل ضرب})$$

تمرینات عمومی فصل هشتم

- 1- کدام یک از فضاهای نمونه زیر پیوسته و کدام یک آنها گسسته است؟
الف: تجربه انداختن یک دانه رمل
ب: تجربه انداختن یک سکه
ج: اصابت تیر به یک دایره
د: تجربه ازدیاد طول یک میله فلزی نظر به حرارت
- 2- از طول یک چارتراش به طول L به صورت اتفاقی یک برش عرضی انجام می‌دهیم تا دو قسمت گردد، چقدر احتمال دارد که قسمت بریده شده طرف چپ کوچک‌تر از 3 برابر قسمت راست باشد.
- 3- کارگر یک شرکت خصوصی هر روز بین ساعات 8 تا 8:50 در ایستگاه نزدیک منزلش که سرویس‌های مامورین آن شرکت به اوقات 8:15، 8:30 و 8:45 به ایستگاه می‌رسند منتظر است. چقدر احتمال دارد که شخص مذکور کم‌تر از 5 دقیقه منتظر سرویس باشد؟
- 4- به صورت تصادفی از انتروال بسته $[0, 3]$ دو عدد را انتخاب می‌نماییم. دریافت کنید احتمال آن که مجموع اعداد کمتر از 5 و بزرگ‌تر از 2 باشد.
- 5- یک نقطه به صورت تصادفی در داخل مخروطی که شعاع قاعده آن $R = \sqrt{3}$ باشد، انتخاب می‌کنیم. دریافت کنید احتمال آن که نقطه داخل کره محاط در این مخروط قرار گیرد؟
- 6- خراب بودن یک قلم خودکار می‌تواند دو دلیل داشته باشد:
- خرابی میخانیکیت
- خرابی نیچه خودکار
هرگاه احتمال آن که یک قلم خودکار خراب باشد 0.088 و احتمال علت خرابی دلیل شماره 1 مساوی به 0.05 باشد و برای دومین نقص قیمت احتمال مساوی به 0.002 باشد، مطالعه کنید آیا دو دلیل بالا با هم حوادث مستقل و یا غیر مستقل می‌باشند؟
- 7- خیر می‌خواهد قفل خانه را با کلیدی که با چهار کلید همسان در جیش قرار دارند. باز کند با کدام احتمال بعد از امتحان سوم کلیدی که از جیش می‌گیرد کلید قفل خواهد بود در صورتی که:
(a) کلیدهای امتحان شده را تحت شرطی که کلید اصلی نباشد دوباره به همان جیب خود می‌گذارد.
(b) کلیدهای امتحان شده را تحت شرطی که کلید اصلی نباشد در جیب دیگر خود می‌گذارد.